Elementos de Análisis Matemático

María E. Ballvé   Miguel Delgado   Pedro Jiménez
José L. de María   M. Teresa Ulecia

SANZ Y TORRES

Segunda Edición
revisada, corregida
y aumentada

Elementos de Análisis Matemático

Elementos de Análisis Matemático

María E. Ballvé
Miguel Delgado
Pedro Jiménez
José L. de María
M. Teresa Ulecia
U.N.E.D.



SANZ Y TORRES

Prólogo

Este libro está escrito para un cuatrimestre introductorio al Análisis Matemático. En él se presentan tópicos de repaso de la Enseñanza Media y se incorporan algunos más especializados, propios de la Enseñanza Superior. Por tanto el alumno deberá en los primeros capítulos decidir si su contenido ya lo tiene asimilado y sencillamente repasar o bien estudiarlos con más profundidad. El rigor de las demostraciones posiblemente sea nuevo y quizás convenga una lectura detallada que le haga profundizar en los importantes Teoremas que esta disciplina contiene. Los ocho últimos capítulos son, casi seguro, una materia con la que no se ha enfrentado el estudiante por lo que tendrán que ser atendidos con un especial cuidado.

Las cuatro partes básicas que lo componen son Definiciones Topológicas en **R**, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Cálculo Numérico, siempre de funciones reales de una variable real. La posibilidad de introducir estas mismas materias para funciones de varias variables reales fue muy discutida por los autores. Finalmente y dada la limitación temporal del curso se optó por asentar lo ya sabido e incorporar unos pocos elementos nuevos para preparar al estudiante interesado en la labor de ampliar sus conocimientos en el Análisis Matemático.

Especial cuidado se ha puesto en los ejemplos, que son la trama fundamental del libro, y que se han elegido como parte sustancial del curso. Estos ejemplos son de explicación de las Definiciones y Teoremas, algunos parecerán demasiado fáciles pero su finalidad es la de suplir, en la medida de lo posible, a los ejemplos descriptivos que se realizarían en la pizarra y que no deben de ser complicados sino claros. Se ha puesto especial énfasis en completar cada hecho matemático fundamental con uno o varios ejemplos aclaratorios de los que no nos cansaremos de resaltar su importancia. Las soluciones a los problemas propuestos se encuentran en el libro complementario "Problemas de Análisis Matemático" que ha sido elaborado por los mismos autores con el fin de ampliar la colección de ejemplos y problemas relacionados con las materias de este libro.

Agradecemos las sugerencias y la ayuda prestada por Compañeros y Profesores Tutores de Análisis Matemático de la UNED en la mejora de este texto, en especial a la profesora María Tobar Puente.

LOS AUTORES

INDICE

Capítulo 1

Topología de R

En el cuerpo de los números reales **R** se pueden encontrar casi todos los contenidos matemáticos que el Análisis Matemático utiliza. Este conjunto elemental, pero no sencillo, requiere los estudios más ricos y los teoremas más profundos. En este capítulo encontraremos varios de ellos.

Se comienza con la exposición de la axiomática del conjunto de números reales, describiéndose brevemente las propiedades más utilizadas. La construcción de **R** por sucesiones de Cauchy o por cortaduras de Dedekind son considerablemente más largas que el método axiomático, por eso se ha elegido éste.

Algebraicamente **R** es un cuerpo conmutativo, pero tiene una estructura de orden compatible con la estructura del cuerpo, lo que le hace ser un espacio métrico y por tanto, tiene una **Topología** que permite la clasificación de sus subconjuntos con las propiedades topológico-geométricas. Además, su axioma más característico, el axioma del supremo, o su equivalente el postulado de Cantor, hacen de él un conjunto único, salvo isomorfismos.

R ha sido fuente de inspiración y modelo de todo el desarrollo del Análisis Moderno, de hecho, parte de la Teoría de Conjuntos ha surgido de problemas que se planteaban en **R**: el matemático George Cantor (1845-1918) introdujo las cuestiones de cardinalidad y los conceptos topológicos en sus estudios sobre este cuerpo. Otros matemáticos que estudiaron la fundamentación de **R** son Cauchy, Dedekind, Frechet, Borel, Heine, Weierstrass, Bolzano.

Se puede considerar que lo más importante de la historia de las matemáticas es la historia y desarrollo del cuerpo de los reales con sus propiedades, características e insuficiencias. Desde los Pitagóricos, en

los que la aparición de $\sqrt{2}$ causó una profunda crisis de fundamentos, pasando por el descubrimiento de i como $\sqrt{-1}$, hasta el relativamente moderno axioma del continuo, **R** fue fuente de inspiración y desarrollo.

El conjunto **R** es un excelente modelo para la introducción de conceptos topológicos, de lo cual nos aprovechamos en este capítulo.

Finalmente introducimos los conjuntos compactos que son aquellos en los cuales las funciones continuas tienen gran riqueza de propiedades. Además, se muestran teoremas muy importantes como el teorema de Heine-Borel ó el de Bolzano-Weierstrass.

Sección

1-1

Axiomática de R

1-1.1 Axiomática de R

El lector está familiarizado con los conjuntos de números **N**, **Z**, **Q**, **R**, desde su etapa de estudios de secundaria, no obstante, presentamos **R** de forma axiomática para fijar las reglas de uso de los números reales.

La axiomática de **R** se presenta en cuatro grupos:

I) Axioma de adición. Hay definida una suma (+) en **R** de forma que si $x,y \in \mathbf{R}$ entonces su suma $x+y$ pertenece a **R**.

Esta operación tiene las siguientes propiedades:

a) $x+y = y+x$ para cualquier $x,y \in \mathbf{R}$.

b) $(x+y)+z = x+(y+z)$ para cualquier $x,y,z \in \mathbf{R}$.

c) Existe un elemento de **R**, denotado por el símbolo 0, tal que

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$

d) Para todo $x \in \mathbf{R}$ existe un elemento, denotado $-x$, tal que $x+(-x) = 0$. A este elemento se le denomina elemento opuesto de x.

Esto se expresa algebraicamente diciendo que (**R**,+) es un grupo conmutativo.

II) Axiomas de multiplicación. Hay definido un producto (·) en **R** de forma que si $x,y \in \mathbf{R}$ su producto $x \cdot y$ (o bien xy) pertenece a **R**. Esta operación tiene las siguientes propiedades:

a) $xy = yx$ para cualquier $x,y \in \mathbf{R}$.

b) $(xy)z = x(yz)$ para cualquier $x,y,z \in \mathbf{R}$.

c) Existe un elemento de **R** , denotado por el símbolo 1, tal que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

d) Para todo $x \neq 0$, existe un elemento $\frac{1}{x}$ tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. A este elemento se le denomina el elemento inverso de x.

e) Para todo $x,y,z \in \mathbf{R}$ se verifica que $x(y + z) = xy + xz$.

Los axiomas I y II se resumen diciendo que la estructura algebraica de **R** es de cuerpo conmutativo.

III) Axiomas de orden. Dados dos elementos $x,y \in \mathbf{R}$ se satisfacen una de las dos (o ambas a la vez) relaciones $x \leq y$ (x es menor o igual que y) ó $y \leq x$, con las propiedades siguientes:

a) $x \leq x$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

b) Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

c) Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

d) Si $x \leq y$, entonces $x+z \leq y+z$ para todo $x,y,z \in \mathbf{R}$.

e) Si $0 \leq x$ y $0 \leq y$ entonces $0 \leq xy$.

Se suele denotar a $x \leq y$, en el caso de $x \neq y$, por $x < y$ (ser estrictamente menor que). Al decir que $(\mathbf{R},+,.,\leq)$ es un cuerpo ordenado se hace referencia a los axiomas I, II y III en conjunto.

IV) Axioma del supremo. Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se dice **acotado superiormente** si existe un elemento z de **R** tal que $x \leq z$ para todo $x \in A$. (Se suele denotar por $A \leq z$). Al elemento z se le denomina **cota superior** del conjunto A.

Una cota superior de A, s, se denomina **supremo** de A si cualquier otra cota superior $z \in \mathbf{R}$ de A cumple que $s \leq z$, es decir, es la menor de las cotas superiores.

Aunque parece natural la existencia del supremo s, esto no lo es, y debe ser introducido como otro axioma.

"Todo conjunto $A \subset \mathbf{R}$ no vacío y acotado superiormente posee supremo".

Los axiomas I, II, III y IV introducen el cuerpo de los números reales, y como consecuencias inmediatas de estos axiomas se presentan todas las proposiciones necesarias para trabajar con este cuerpo, las cuales se listan, sin demostración, a continuación.

- Consecuencias de los axiomas de adición

  1. El elemento 0 es único.
  2. Todo elemento x de **R** tiene un único opuesto.
  3. La ecuación $a+x = b$ posee una única solución $x = b-a$.

- Consecuencias de los axiomas de multiplicación.

  1. El elemento 1 es único.
  2. Todo elemento $x \neq 0$ de **R** admite un único elemento inverso.
  3. La ecuación $ax = b$, con $a \neq 0$, tiene por única solución $x = \frac{b}{a}$.
  4. Si $xy = 0$ con $y \neq 0$ entonces $x = 0$.

5. $-x = (-1)x$. Donde -1 es el elemento opuesto para la suma del elemento 1 y $(-x)$ el opuesto de x.

- Consecuencias de los axiomas de orden.

1. Si $x \leq y$, $y \leq z$ y $x = z$, entonces $x = y = z$.
2. Si $x < y$ e $y \leq z$, entonces $x < z$.
3. Si $x \leq y$ e $y < z$, entonces $x < z$.

1-1.2 Definición

Si $x \leq 0$ entonces x se dice que es un número no positivo, si $x > 0$ positivo, si $x \geq 0$ no negativo y si $x < 0$ negativo.

1-1.3 Definición

Dados dos números reales $x \leq y$, entonces

$x = \min\{x,y\}$ es el mínimo de ambos números,

$y = \max\{x,y\}$ es el máximo de ambos números.

De forma análoga, por recurrencia, se define $\min\{x_1 \ldots x_n\}$ y $\max\{x_1 \ldots x_n\}$.

1-1.4 Definición

El **valor absoluto** de x, $|x|$, es el máximo de x y $-x$.

$$|x| = \max\{x,-x\}$$

1. $|x| \leq a$ es equivalente a $-a \leq x \leq a$.
2. Si $x \leq y$ y $0 \leq z$, entonces $xz \leq yz$.
3. $|x+y| \leq |x|+|y|$ (desigualdad triangular).

$$|x+y| = \max\{x+y,-(x+y)\} \leq \max\{x,-x\}+\max\{y,-y\} = |x|+|y|.$$

4. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

1-1.5 Definición

Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se dice **acotado inferiormente** si existe $z \in \mathbf{R}$ tal que $z \leq x$ para todo $x \in A$. (Se suele denotar $z \leq A$). Al elemento z se le denomina **cota inferior** de A.

Una cota inferior s de A se denomina **ínfimo** si cualquier otra cota inferior z de A cumple que $z \leq s$, es decir, es la mayor de las cotas inferiores.

Un conjunto se dice **acotado** si es acotado superior e inferiormente.

1-1.6 Consecuencias del axioma del supremo.

1. Todo conjunto acotado inferiormente no vacío tiene ínfimo.

2. **Principio de Arquímedes.** Si $x > 0$ e y es un número real cualquiera, entonces existe un número **entero** n tal que

$$(n-1)x \leq y < nx.$$

Por verificarse esta propiedad, suele decirse que **R** tiene estructura de cuerpo arquimediano.

3. Para todo par de números a,b con $a < b$ existe un número racional q tal que $a < q < b$. Por tanto, existen infinitos puntos racionales entre a y b.

Estas consecuencias son continuamente usadas en este libro.

Sección

1-2

Topología de R

Los axiomas del orden de **R** junto con el axioma del supremo desarrollan una estructura en **R**, denominada **topología**, que introduce con rigor el concepto de proximidad, de imprescindible utilidad para definir todos los conceptos del cálculo diferencial e integral.

1-2.1 Definición

Se llama intervalo abierto de extremos a y b, $a<b$, al conjunto

$$(a,b)=\{x\in \mathbf{R},\ a<x<b\}.$$

Se llama intervalo cerrado de extremos a y b, $a<b$, al conjunto

$$[a,b]=\{x\in \mathbf{R},\ a\leq x\leq b\}.$$

Se llama intervalo semiabierto de extremos a y b, $a<b$, a los conjuntos

$$(a,b]=\{x\in \mathbf{R},\ a<x\leq b\} \text{ donde } a<b,$$

$$[a,b)=\{x\in \mathbf{R},\ a\leq x<b\} \text{ donde } a<b.$$

De forma análoga se definen $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$ y $(a,+\infty)$.

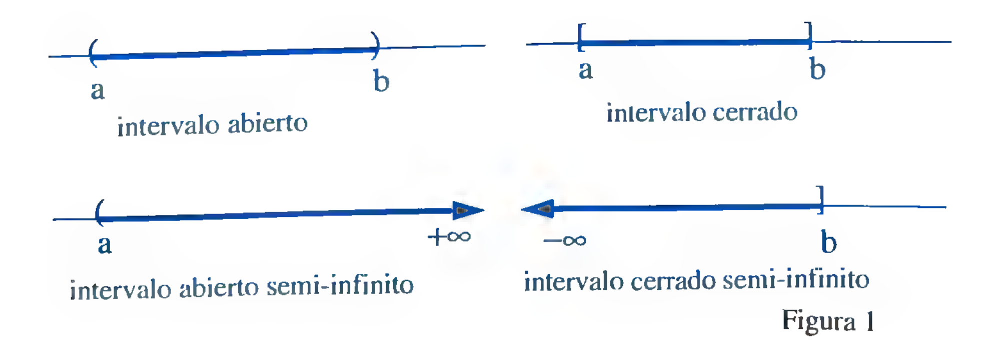


Figura 1

Consecuencias del axioma del supremo son:

1. Para todo intervalo (a,b) existe un número racional q contenido en él. Por tanto, existen infinitos puntos racionales entre a y b.

2. **Postulado de Cantor**. Dada una familia F de intervalos de la forma [a,b] tales que dados $I_1=[a_1,b_1]$ e $I_2=[a_2,b_2]$ dos elementos cualquiera de F se tiene que $I_1 \subset I_2$ o $I_2 \subset I_1$, entonces la intersección de todos los intervalos de la familia contiene al menos un punto.

Estas consecuencias son continuamente usadas en este libro.

1-2.2 Definición

Un entorno abierto centrado en a es un intervalo abierto de la forma (a-r,a+r) con $r > 0$. A un entorno abierto centrado en el punto a se le denomina **entorno del punto a**, y se denotará por N(a). Si se quiere especificar el radio $r > 0$, entonces de denotará N(a,r).

Ejemplo 1

Obsérvese que $N(a,r) = \{y \in \mathbf{R}: |a-y| < r\}$ puesto que $N(a,r) = (a-r,a+r)$.

Si $x \in (a - r, a + r)$ entonces $a - r < x < a + r$, luego $-r < x - a < r$ y por tanto $|x-a| < r$, $N(a,r) \subset \{y \in \mathbf{R}: |a-y| < r\}$.

Supongamos que $|y-a| < r$ entonces $-r < y-a < r$, sumando a se tiene que $a - r < y < a + r$, luego $y \in (a - r, a + r) = N(a,r)$. Así pues se prueba que

$$N(a,r)=\{y \in R: |a-y| < r\}.$$

Observación: Esta notación N(a,r) no es estándar. Además, si el lector consulta otros libros verá un concepto más amplio de entorno de un punto a, como aquel conjunto que contiene un entorno centrado en a. En este sentido, el intervalo (0,1) es un entorno de todos sus puntos. Por motivos de simplicidad hemos preferido hacer esta reducción suficiente para el desarrollo que vamos a realizar.

Si N(a) ó N(a,r) es un entorno del punto a, al conjunto $N(a) - \{a\}$ se le denomina **entorno reducido del punto a** y se denota $N^*(a)$.

Ejemplo 2

Si $x,y \in \mathbf{R}$ y $x \neq y$, entonces existen N(x,r) y N(y,r) disjuntos. Al considerar $|x-y| = 2r$ se tiene que N(x,r) y N(y,r) son disjuntos, pues si existiese $z \in N(x,r) \cap N(y,r)$ entonces

$$|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| < 2r = |x - y|,$$

lo que es absurdo.

Ejemplo 3

Dado $x \in (a,b)$ tal que $a < b$ entonces existe $N(x,r) \subset (a,b)$. Sea

$$r = \min\{b-x, x-a\}$$ → El radio máx es b-x ó x-a

y veamos que $N(x,r) \subset (a,b)$.

Si $z \in N(x,r)$ entonces $|z-x| < r$, luego $-r < z-x < r$, por tanto

$$x-r < z < x+r.$$

Como $r \leq b-x$ se tiene $r + x \leq b$, y como $r \leq x-a$ entonces $a \leq x-r$, luego $z \in (a,b)$ y $N(x,r) \subset (a,b)$.

1-2.3 Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ es **abierto** si para todo $x \in A$ existe un entorno $N(x) \subset A$.



Figura 2

Un conjunto E es **cerrado** si su complementario es abierto, es decir, si para todo x no perteneciente a E existe $N(x) \subset \mathbf{R}$ -E.

En el Ejemplo 3 hemos probado que (a,b) es un abierto.

Ejemplo 4

Para probar que [a,b] es cerrado comprobamos que $\mathbf{R}$ -[a,b] es abierto. Al tomar el punto a (o bien el b), cualquier $N(a)=(a-r,a+r)$ tiene puntos $a-r < y < a$ tales que no están en [a,b]. Sea $y \in \mathbf{R}$-[a,b], entonces $y < a$ ó $b < y$. Tomamos $b < y$ (el otro caso se hace igual), entonces si se elige $r = y-b$, el entorno $(y-r,y+r) \subset \mathbf{R}$-[a,b], luego $\mathbf{R}$-[a,b] es un abierto y [a,b] es cerrado.



Figura 3

Ejemplo 5

Sea $A = \bigcup_n (a_n,b_n)$, con $a_n < b_n$, entonces A es un abierto. Para ver esto se procede de la forma siguiente: Sea $x \in A$ luego existe un intervalo (a_p,b_p) tal que $x \in (a_p,b_p)$ y, por el Ejemplo 3, existe

$$N(x,r) \subset (a_p,b_p) \subset \bigcup_n (a_n,b_n) = A.$$

Así pues, A es abierto.

Al conjunto de todos los abiertos de **R** se le denomina la **Topología usual** de **R**. A continuación se exponen sus propiedades básicas en el siguiente teorema.

1-2.4 Teorema

Sea T la familia de todos los abiertos de **R**, T tiene las siguientes propiedades.

a) El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto **R** pertenecen a T.

b) La unión de cualquier familia o colección de abiertos es abierto.

c) La intersección de cualquier familia finita de abiertos es abierto.

Demostración

a) El conjunto $\varnothing$ cumple "formalmente" la Definición 1-2.3, porque al no tener ningún elemento la conclusión es cierta. El conjunto **R** también es abierto; dado $x \in \mathbf{R}$ tomamos $(x-1,x+1)$, y este intervalo está contenido en **R**. En efecto $(x-1,x+1) = \{y \in \mathbf{R}: |x-y| < 1\} \subset \mathbf{R}$ (Ejercicio 5).

b) Sea A una unión de una familia de abiertos $\{A_n\}$, y $x \in A$; entonces x pertenece a algún conjunto A_p. Como A_p es abierto existe $N(x) \subset A_p$, pero $A_p \subset A$, luego $N(x) \subset A$. Así pues, A es abierto.

c) Sean $A_1 \ldots A_n$ una familia finita de abiertos de **R**, y sea $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, entonces $x \in A_i$ para todo $i=1,\ldots,n$. Luego existe $(x-r_i,x+r_i) \subset A_i$. Se considera $r = \min\{r_1 \ldots r_n\}$, el intervalo $(x-r,x+r)$ está contenido en cada intervalo $(x-r_i,x+r_i)$. En efecto como $r \leq r_i$ se tiene que

$$\{y:|x-y| < r\} \subset \{y:|x-y| < r_i\} \text{ para todo } i = 1, \ldots n.$$

Luego $N(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} N(x_i,r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Ejemplo 6

La propiedad c) anterior no se puede generalizar al caso no finito.

Sea $(a_n,b_n) = (\frac{-1}{n},\frac{1}{n})$, entonces $\bigcap_n (a_n,b_n) = \{0\}$ que no es abierto pues no existe $N(0,r) \subset \{0\}$ con $r > 0$.

En el siguiente teorema se expresan las propiedades de los conjuntos cerrados de **R**, que se demuestran usando las leyes de De Morgan y el Teorema 1-2.4.

1-2.5 Proposición

Sea F la familia de todos los conjuntos cerrados de **R**, F tiene las siguientes propiedades:

a) El conjunto $\varnothing$ y el conjunto **R** son cerrados.

b) La intersección de cualquier familia de cerrados es cerrado.

c) La unión de una familia finita de cerrados es cerrado.

Ejemplo 7

La unión de una familia no finita de conjuntos cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado.

Para demostrar esto se considera $C_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ y se observa que su unión es el intervalo $(0,1)$ que no es cerrado porque $1 \in \mathbf{R}-(0,1)$, y cualquier entorno $N(1,r)$ tiene elementos del conjunto $(0,1)$,

$$N(1,r)=\{y: 1-r < y < 1+r\}$$

contiene elementos menores que 1.

Por tanto $\mathbf{R}-(0,1)$ no es abierto.

Ejemplo 8

Cualquier conjunto formado por un único punto, $\{p\}$, es un conjunto cerrado. En efecto, este conjunto se puede expresar de la forma:

$$\{p\}=\bigcap_{n\in N}[p-\frac{1}{n},p+\frac{1}{n}],$$

y como intersección de los cerrados $[p-\frac{1}{n},p+\frac{1}{n}]$ se tiene que es un cerrado.

Ejemplo 9

Los intervalos $(-\infty,a)$ y $(a,+\infty)$ son conjuntos abiertos y los intervalos $(-\infty,a]$ y $[a,+\infty)$ son conjuntos cerrados. Se puede escribir

$$(-\infty,a)=\bigcup_{n\in N}(-n,a) \text{ y } (a,+\infty)=\bigcup_{n\in N}(a,n)$$

que son uniones de abiertos. Por otra parte,

$$\mathbf{R}-(a,+\infty)=(-\infty,a] \quad \text{y} \quad \mathbf{R}-(-\infty,a)=[a,+\infty)$$

son complementarios de abiertos, luego son cerrados.

Sección

1-3

Puntos notables de un conjunto

Una vez considerada la estructura topológica en **R** se introduce una "geometría" en **R** en el sentido de que dado un conjunto A , los puntos de **R** tienen una posición, topológica, respecto al conjunto A.

1-3.1 Definición

Un punto $a\in A$ se dice que es un **punto interior** de A si existe un entorno del punto tal que $N(a)\subset A$.

Los puntos interiores de un conjunto A siempre pertenecen al conjunto A, y al conjunto de puntos interiores de A se le denomina interior de A, int(A). Se denomina ext(A) al conjunto int(**R**-A).

Un punto $b\in$ **R** se dice punto de adherencia de A, o **punto adherente,** si en todo entorno del punto, N(b,**r**), existen puntos de A.

Los puntos de A son puntos adherentes de A, aunque pueden existir puntos adherentes que no pertenecen al conjunto. Al conjunto de puntos adherentes de A se le denomina adherencia de A, adh(A).

Un punto $c\in$ **R** se denomina **punto frontera** de A si en todo entorno del punto, N(c,r), existen puntos de A y puntos de **R**-A.

Los puntos frontera pueden pertenecer o no a A, y además, son puntos adherentes. Al conjunto de los puntos frontera se le denomina frontera de A, Fr(A) o front(A).

1-3.2 Proposición

Sea A un conjunto de **R**.

a) $\text{int}(A)\subset A$ e int(A) es un conjunto abierto.

b) $A\subset\text{adh}(A)$ y adh(A) es un conjunto cerrado.

c) $\text{adh}(A) = \text{int}(A)\cup\text{Fr}(A)$ y $\text{int}(A)\cap\text{Fr}(A) = \emptyset$.

d) $\text{Fr}(A) = \text{adh}(A)\cap\text{adh}(R\text{-}A)$.

e) A es abierto si y sólo si int(A) = A.

f) **R**-int(A) = adh(**R**-A).

g) **R**-adh(A) = int(**R**-A).

h) A es cerrado si y solo si $adh(A) = A$.

Demostración

Los apartados a, b, c, d y e son consecuencia directa de la Definición 1-2.1. de conjunto abierto.

f) Si $x \in \mathbf{R}\text{-}int(A)$, entonces para todo $N(x)$ existen puntos de $\mathbf{R}$-A, luego $x \in adh(\mathbf{R}\text{-}A)$.

Si $x \in adh(\mathbf{R}\text{-}A)$, entonces para todo $N(x)$ existen puntos de $\mathbf{R}$-A, por lo tanto, ningún entorno $N(x)$ está contenido en A, luego $x \in \mathbf{R}\text{-}int(A)$.

g) Se demuestra de forma análoga al apartado f.

h) Si A es cerrado entonces $\mathbf{R}$-A es abierto, luego, $int(\mathbf{R}\text{-}A) = \mathbf{R}\text{-}A$. Por lo tanto, $\mathbf{R}\text{-}adh(A) = \mathbf{R}\text{-}A$ y $adh(A) = A$.

Si $adh(A) = A$ entonces $\mathbf{R}\text{-}adh(A) = \mathbf{R}\text{-}A$ y por tanto $int(\mathbf{R}\text{-}A) = \mathbf{R}\text{-}A$, luego $\mathbf{R}$-A es abierto y A es cerrado.

Ejemplo 10

Para calcular el conjunto interior, la adherencia y la frontera de (a,b] procedemos de la siguiente forma. Como $int((a,b]) \subset (a,b]$, los puntos interiores se buscan en (a,b]. Si $a < y < b$, tomamos

$$r = \min\{y-a, b-y\},$$

entonces $(y-r, y+r) \subset (a,b]$, por tanto $(a,b) \subset int((a,b])$.

Si $y = b$, para todo $r > 0$, $(b-r, b+r)$ tiene puntos que no están en (a,b], de hecho $(b, b+r) \cap (a,b] = \emptyset$, luego $b \notin int((a,b])$ e $int((a,b]) = (a,b)$.

Veamos que $adh((a,b]) = [a,b]$. En efecto, $(a,b] \subset adh((a,b])$, además, $a \in adh((a,b])$ pues para todo $r > 0$, $(a-r, a+r) \cap (a,b] \neq \emptyset$.

Por tanto $[a,b] \subset adh((a,b])$. Además, $adh((a,b]) \subset [a,b])$ pues si $y \notin [a,b]$ entonces $y < a$ ó $b < y$, y por el mismo razonamiento del Ejemplo 4 se prueba que $y \notin adh((a,b])$, por tanto $adh((a,b]) = [a,b]$. Por la Proposición 1-3.2.,

$$Fr((a,b]) = adh((a,b]) \cap adh(\mathbf{R}\text{-}(a,b]) = adh((a,b]) \cap (\mathbf{R}\text{-}int(a,b]) =$$
$$= adh((a,b])\text{-}int(a,b] = \{a,b\}.$$

Ejemplo 11

Sea $A = \{y \in \mathbf{Q}: 0 < y < 1\}$, se halla adh(A), int(A) y Fr(A). Por la Proposición 1-3.2. se sabe que $int(A) \subset A$. Sea $y \in A$ y $N(y,r) = (y-r, y+r)$,

en todo intervalo hay puntos irracionales y estos no están en A, se tiene que N(y,r) no está contenido en A. Así pues, $y \notin int(A)$ e $int(A) = \varnothing$.

Sea $y \in [0,1]$, en todo entorno de y, N(y,r) = (y - r,y + r), hay puntos racionales, por tanto $[0,1] \subset adh(A)$. Sea $y \notin [0,1]$, si tomamos $r = \min\{|y|, |y - 1|\}$, entonces $N(y,r) \cap A = \varnothing$. En efecto, si $x \in N(y,r)$ entonces $|x - y| < r$, por tanto, $y - r < x < y + r$, y además

$$\text{si } y < 0 \text{ entonces } x < y + r < 0,$$

$$\text{si } y > 1 \text{ entonces } 1 < y - r < x.$$

Luego $y \notin adh(A)$ y $adh(A) = [0,1]$. Por tanto,

$$Fr(A) = adh(A) - int(A) = [0,1].$$

Obsérvese, que todos los puntos de A son punto frontera.

Ejemplo 12

Sea $A = (a,b) \cup (c,d)$, se halla int(A). Como A es abierto por ser unión de abiertos entonces int(A) = A.

Observación. En resumen, sea $A \subset \mathbf{R}$, y $a \in \mathbf{R}$

$a \in int(A)$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $N(a,r) \subset A$.

$a \in adh(A)$ si y sólo si para cualquier $r > 0$ se tiene que $N(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

$a \in Fr(A)$ si y sólo si para cualquier $r > 0$ se tiene que

$$N(a,r) \cap A \neq \varnothing \text{ y } N(a,r) \cap (\mathbf{R} - A) \neq \varnothing.$$

1-3.3 Definición

Existe otra clasificación de los puntos de **R** respecto de un conjunto A, que establece la "proximidad" de un punto al conjunto A.

Un punto a se dice **punto de acumulación** del conjunto A, si en todo entorno N(a,r) hay puntos de A distintos de a, es decir, si para todo $r > 0$ se tiene que $N^*(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le denomina conjunto acumulación o derivado del conjunto A, y se denota A´ ó acum(A). Obviamente, $acum(A) \subset adh(A)$.

N(x,r_1)

N(x,r_3) N(x,r_2)

x

Punto de acumulación Figura 4

Un punto a∈A se dice **punto aislado** de A si existe r > 0 tal que N(a,r)∩A={a}, (o equivalentemente N*(a,r)∩A = ∅).

Al conjunto de puntos aislados de A se le denomina conjunto aislado del conjunto A, Ais(A). Además, por la propia definición se tiene

$$\text{Ais}(A) \subset A \subset \text{adh}(A).$$



a es un punto aislado Figura 5

Ejemplo 13

Se prueba que int(A)⊂acum(A) de la siguiente forma. Sea a∈int(A), entonces existe r > 0 tal que N(a,r)⊂A.

Para cualquier entorno N(a,p) se tiene que N(a,r)∩N(a,p)⊂N(a,p)∩A, pero N(a,r)∩N(a,p) = N(a,min(r,p)) que tiene infinitos puntos de A, distintos de a, luego a∈acum(A).

Ejemplo 14

Tomemos A = (a,b]∪{c} con a < b < c y calculamos acum(A) y ais(A). El conjunto unitario {c} es precisamente ais(A), para ver esto basta con tomar $r = \frac{|c-b|}{2}$ y N(c,r), y se tiene que A∩N(c,r) = {c}.

El conjunto [a,b] es el de acumulación de A, ya que, si $a \leq x \leq b$ entonces para todo $r > 0$, $A \cap N(x,r)$ tiene infinitos puntos de A distintos de x. Se deja al lector la formalización de este razonamiento.

La siguiente proposición establece las propiedades más importantes de los conjuntos acumulación y aislado. Su demostración es inmediata a partir de las definiciones anteriores.

1-3.4 Proposición

Sea A un subconjunto de **R**, entonces

a) $acum(A) \cap Ais(A) = \varnothing$.

b) $adh(A) = acum(A) \cup Ais(A)$.

c) $ais(A) \subset A$.

d) $int(A) \subset acum(A)$. (Ejemplo 13)

Ejemplo 15

Un conjunto formado únicamente por puntos aislados es el conjunto de los números naturales **N** en **R**. Como $|n-m| \geq 1$ para todo $n,m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$, entonces $N(n, \frac{1}{2}) \cap \mathbf{N} = \{n\}$.

Sección

1-4 Conjuntos compactos

Los subconjuntos más importantes de la recta real en el estudio del Cálculo Diferencial e Integral de una variable real son los conjuntos compactos que tienen una propiedad común a los intervalos de la forma [a,b]; sus mejores representantes.

1-4.1 Definición

Una familia F de subconjuntos se denomina un **recubrimiento** de un conjunto P si $P \subset \bigcup_{A \in F} A$, o sea, si P está contenido en la unión de todos los elementos de la familia F.

Dado F un recubrimiento de P, un subrecubrimiento G es una familia $G \subset F$ tal que es recubrimiento de P.

Ejemplo 16

La familia F de todos los intervalos (a,b) de **R** es un recubrimiento de **R** y la subfamilia G de todos los intervalos (a,b) de extremos racionales es subrecubrimiento de **R**.

Para cada $x \in \mathbf{R}$ consideramos (a,b), con $a = x-1$ y $b = x+1$, que constituye un recubrimiento de **R**. Por otra parte en (x-1,x) hay un racional q y en (x,x+1) hay otro p racional, luego $x \in (q,p)$, así pues, se obtiene un subrecubrimiento de **R**.

Ejemplo 17

Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}$. La familia F formada por los conjuntos unitarios $\{x\}$ tales que $x \in A$ es un recubrimiento de A, pero no admite un subrecubrimiento de A, pues en cuanto eliminemos un conjunto $\{x\}$ en F ya no se recubre A.

1-4.2 Definición

Un conjunto K contenido en **R** es **compacto** si de todo recubrimiento, de K, de conjuntos abiertos, F, se puede extraer un subrecubrimiento, G, con un número finito de elementos. Es decir, $K \subset \mathbf{R}$ es compacto si y sólo si para todo F recubrimiento abierto de K, existen $A_1 \ldots A_n \in F$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Ejemplo 18

Todo subconjunto finito K de **R** es compacto, veamos esto. Sea $K=\{x_1 \ldots x_n\}$ y F un recubrimiento abierto de $\{x_1 \ldots x_n\}$, es decir

$$K \subset \bigcup_{A \in F} A.$$

Para x_1 existe un conjunto abierto A_1 tal que $x_1 \in A_1$, para x_2 existe A_2 tal que $x_2 \in A_2$, y así sucesivamente. La familia $G = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ es un subrecubrimiento finito de K. Por tanto, K es compacto.

Ejemplo 19

R no es un conjunto compacto puesto que determinamos un recubrimiento abierto de **R** que no admite un subrecubrimiento finito. La familia de conjuntos $F = \{(-n,n) : n \in \mathbf{N}\}$ es un recubrimiento abierto de **R** que no admite un subrecubrimiento finito. Supuesto que existiese el subrecubrimiento finito G, entonces $G = \{(-n_1,n_1), \ldots, (-n_k,n_k)\}$. Sea $N = \max\{n_1, \ldots n_k\}$ entonces $\bigcup_{j=1}^{k} (-n_j,n_j) = (-N,N)$, y obviamente **R** no esta contenido en (-N,N) ,pues el punto $N+1 \notin (-N,N)$.

1-4.3 Proposición

La unión finita de compactos es un compacto.

Demostración

Sean $K_1, \ldots, K_n$, conjuntos compactos y $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Para ver que K

es compacto tomemos cualquier recubrimiento abierto F de K. En particular F es recubrimiento abierto de cada K_i luego existe un subrecubrimiento G_i finito de K_i. Entonces la familia $G = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n$ es un subrecubrimiento finito de K, por tanto K es un compacto.

1-4.4 Proposición

Todo conjunto cerrado contenido en un compacto es a su vez un conjunto compacto.

Demostración

Sean $C \subset K \subset \mathbf{R}$, con C cerrado y K compacto. Veamos que C es compacto. En efecto, si F es un recubrimiento abierto de C entonces $F' = F \cup (\mathbf{R} - C)$ es un recubrimiento abierto de K, y por ser K compacto se puede extraer un subrecubrimiento finito G´ que cubre K. Como $C \subset K$ y $C \cap (\mathbf{R} - C) = \varnothing$ se tiene que $G = G' - (\mathbf{R} - C)$ es un subrecubrimiento que cubre C, luego C es compacto.

1-4.5 Proposición

Todo intervalo cerrado [a,b] es compacto.

Demostración

Sea F un recubrimiento abierto de [a,b] y S el conjunto de los puntos $x \in [a,b]$ tales que el intervalo [a,x] se puede recubrir mediante un número finito de elementos de F. Evidentemente $a \in S$ y $S \subset [a,b]$ por lo que S está acotado superiormente, por tanto, existe $c = \sup\{x : x \in S\}$. Como $c \in [a,b]$ entonces existe $A_c \in F$ tal que $c \in A_c$, y como A_c es abierto, existe $r_c > 0$ tal que $(c-r_c, c+r_c) \subset A_c$. Por la definición de supremo existe $x \in (c-r_c, c)$ tal que $x \in S$, y por tanto $c \in S$ ya que $[a,x] \cup [x,c] = [a,c]$ y como [a,x] se puede recubrir por un número finito de conjuntos de F y $[x,c] \subset A_c$, entonces [a,c] se puede recubrir por un número finito de conjuntos de F. Veamos que $c = b$; si $c < b$ entonces existe $r > 0$ tal que $r < r_c$ y $c + r < b$, lo que es una contradicción ya que $c + r > c$, $c + r \in [a,b]$ y $[a, c+r] = [a, c] \cup [c, c+r]$, de donde $c + r \in S$ y c no sería el supremo de S.

1-4.6 Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subset \mathbf{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Demostración

Sea K cerrado y acotado. Por ser acotado se tiene que $K \subset [a,b]$ para

ciertos a,b$\in$ **R**, y como [a,b] es compacto y K es cerrado, entonces K es compacto (Proposiciones 1-4.4 y 1-4.5).

Sea K compacto, se considera $F = \{(-n,n): n \in N\}$ recubrimiento abierto de K, entonces existe un subrecubrimiento $G = \{(-n_1,n_1)...(-n_p,n_p)\}$. Se tiene que $\min\{-n_i : i=1...p\} \leq K \leq \max\{n_i : i=1...p\}$. Luego K está acotado.

Probamos a continuación que K es cerrado. En efecto, adh(K) = K, pues en caso contrario sea y$\in$adh(K)-K. Para cada x$\in$K existen los entornos abiertos $N_x(y)$ y N(x) disjuntos. Como $K \subset \bigcup_{x \in K} N(x)$, existe un subrecubrimiento finito $\{N(x_1),...,N(x_p)\}$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} N(x_i) = M$, como $N(y) = \bigcap_{i=1}^{p} N_{x_i}(y)$ es entorno de y, y $N(y) \cap K \subset N(y) \cap M = \emptyset$, resulta que y no pertenece a la adherencia de K.

La caracterización del Teorema de Heine-Borel es la más operativa, para ver si un conjunto es compacto en **R**. La Definición 1-4.2 suele utilizarse para probar que un conjunto no es compacto.

Ejemplo 20

Probamos que $A=\{x \in \mathbf{Q},\ 0 < x < 1\}$ no es compacto. En efecto, por el Ejemplo 11 adh(A)$\neq$A, luego no es cerrado, y por el Teorema de Heine-Borel no puede ser compacto.

1-4.7 Teorema de Bolzano-Weierstrass

Todo conjunto A$\subset$**R** no finito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración

Por ser A acotado existirán dos números a,b$\in$**R** tales que A$\subset$[a,b] . Si A no tiene punto de acumulación alguno, los puntos de A son aislados, luego para cada x$\in$A existe N(x) tal que $N(x) \cap A = \{x\}$ y A es un conjunto cerrado, por tanto, A es un conjunto compacto. La familia de entornos $\{N(x): x \in A\}$ es un recubrimiento abierto de A, y por ser A compacto existe $N(x_1),...,N(x_n)$ subrecubrimiento finito de A, entonces

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i) \cap A = \{x_1,...x_n\}.$$

Luego, A es finito; lo cual es una contradicción.

Problemas Propuestos

1) Probar que la intersección de cualquier familia de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

2) Probar que si $K \subset \mathbf{R}$ es un conjunto compacto, $A \subset \mathbf{R}$ es abierto y $C \subset \mathbf{R}$ es cerrado, entonces $K \cap C$ y $K-A$ son compactos.

3) Probar que el conjunto $A=\{x \in \mathbf{R} : 3 \geq x^2 - 1 > 0\}$ no es compacto.

4) Determinar el interior, el exterior, la frontera, la adherencia y el conjunto de los puntos de acumulación del conjunto **N** de los números naturales.

5) Sea $A = [-8,-5] \cup (-3,0) \cup [1,2) \cup \{3\} \cup [8,+\infty)$. Calcular int(A), ext(A), fr(A), adh(A) y el conjunto acum(A) de los puntos de acumulación de A.

Capítulo 2

Sucesiones

Una sucesión notable en la historia de las Matemáticas fue construida por Leonardo de Pisa (1170-1250) cuyo verdadero nombre era Leonardo Pisano Bigollo, siendo también conocido por Fibonacci, al tratar su "problema de los conejos". En este problema se plantea cuántas parejas de conejos se obtienen en un año, suponiendo que cada pareja produzca una nueva pareja cada mes, que a su vez se puede reproducir a partir del segundo mes. Obteniéndose así la sucesión : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... de término general $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Siglos después encontramos las primeras huellas del descubrimiento de los logaritmos por la comparación de las progresiones geométricas y aritméticas. La relación la vieron claramente Miguel Stifel (1487-1567) y Nicolas Chuquet que ya en 1484 escribió el primer Tratado de Algebra en francés en el que se cuentan el origen del logaritmo más de cien años antes de Bürgi (1549-1632) o Juan Neper (1550-1617).

Realmente no fue hasta el Siglo XVIII con Agustin-Luis Cauchy (1789-1857) quien con sus trabajos sobre las sucesiones realizó la primera exposición sistemática sobre el tema e introdujo un cierto rigor en el aspecto de la convergencia. Debemos a Cauchy un buen número de definiciones precisas y métodos exactos en el Análisis moderno, en el cual el concepto de límite juega un papel central.

Sección

2-1

Introducción

Una de las herramientas más útiles del Cálculo Infinitesimal son las sucesiones numéricas. Su formalización se debe fundamentalmente a Cauchy (1789-1857) y son el método más sencillo de introducir el concepto de límite, que es la pieza angular usada en el estudio del Análisis Matemático.

2-1.1 Definición

Una sucesión de números reales es una función $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, donde $\mathbf{N}$ es el conjunto de los números naturales. Por tanto, la imagen de una sucesión f es $\{f(n): n \in \mathbf{N}\}$.

En general, por un abuso del lenguaje, se llama sucesión a la imagen de una sucesión y se denota por

$$(x_n)_{n=1}^{+\infty} \quad \text{ó} \quad (x_n),$$

donde $x_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Es decir, una sucesión es una familia numerable ordenada de números reales $\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, al número $x_n = f(n)$ se le denomina término n-ésimo de la sucesión f. A lo largo del libro se utiliza esta notación.

2-1.2 Definición

- Una subsucesión de una sucesión $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ es la composición de una función $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ estrictamente creciente con la función $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. Es decir, dada una sucesión (x_n) una subsucesión de ella es toda sucesión de la forma (x_{n_k}) donde $n_k < n_{k+1}$ para todo $k \in \mathbf{N}$.
- Una sucesión (x_n) es acotada si $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto acotado.
- Una sucesión (x_n) es monótona creciente si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.
- Una sucesión (x_n) es monótona decreciente si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Ejemplo 1

a) La sucesión $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ tal que $f(n) = \frac{1}{n}$ es la sucesión

$$(\frac{1}{n}) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\}.$$

b) La sucesión $(\frac{1}{2n})$ es una subsucesión de la sucesión del anterior apartado, formada por los términos pares, o bien, es $f \circ g$ donde f se define como en el primer apartado y $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ es $g(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Ejemplo 2

a) La sucesión (n) es monótona creciente no acotada.

$$\{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}.$$

b) La sucesión $(1 - \frac{1}{n})$ es monótona creciente y acotada (por estar contenida en [0,1]).

$$\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n-1}{n}, ...\}.$$

c) La sucesión $\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, ..., 0, \frac{1}{2^n}, ...\}$ ni es monótona decreciente ni monótona creciente.

d) En la sucesión del apartado anterior, la sucesión { 0, 0 ,0 ,...,0,...} es una subsucesión pues son los términos pares, pero no lo es de la sucesión del apartado b) en la que sólo $x_1 = 0$.



Sección

2-2

Sucesiones Convergentes

A continuación se estudian las sucesiones cuyos términos se "aproximan" sucesivamente a un número.

2-2.1 Definición

Una sucesión de números reales (x_n) converge al número real x, o la sucesión (x_n) tiene por límite el número real x, y lo denotamos con

$$(x_n) \to x \quad \text{ó} \quad \lim_n x_n = x \quad \text{ó} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x,$$

si para cada entorno N(x) de x existe un número natural n_o tal que $x_n \in N(x)$ para todo $n \geq n_o$.

Si se tiene en cuenta la definición de entorno

$$N(x,r) = (x-r, x+r) = \{y \in \mathbf{R}: |y-x| < r\},$$

resulta que esta definición se expresa de la siguiente forma:

$\lim_n x_n = x$ si y sólo si para cada número real $r > 0$ existe $n_o \in N$ tal que si $n \in N$ y $n \geq n_o$ entonces $|x_n - x| < r$.

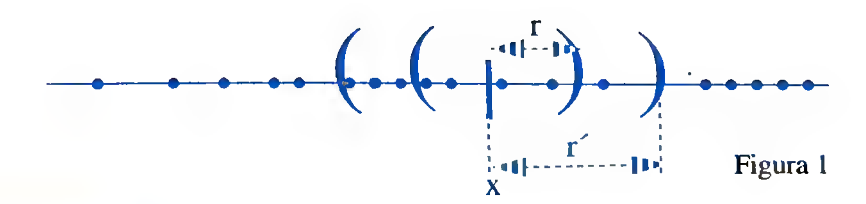


Figura 1

Ejemplo 3

a) La sucesión $(\frac{1}{n})$ es convergente a cero. Sea $r > 0$ y consideremos el par de números positivos 1 y $\frac{1}{r}$. Por la propiedad arquimediana de

R existe n_0 tal que $\frac{1}{r} < n_0 \cdot 1$, por tanto, $\frac{1}{n_0} < r$.

Si $n \geq n_0$, entonces $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < r$.

b) La sucesión $(\frac{1}{n^a})$ con $a > 0$ converge a cero.

Sea $1 > r > 0$ y consideremos los números positivos 1 y $(\frac{1}{r})^{1/a}$. Por la propiedad arquimediana de **R** existe n_0 tal que $(\frac{1}{r})^{1/a} < n_0 \cdot 1$.

Luego, $\frac{1}{n_0^a} < r$ y, por tanto, si $n \geq n_0$ entonces $\left| \frac{1}{n^a} - 0 \right| \leq \frac{1}{n_0^a} < r$.

Ejemplo 4

La sucesión $((-1)^n)$ no es convergente.

Si existiese $x \in \mathbf{R}$ tal que $x = \lim_n ((-1)^n)$, entonces existiría $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se verificaría que $(-1)^n \in N(x, \frac{1}{4})$), por tanto,

$$\left| (-1)^n - (-1)^{n+1} \right| \leq \left| (-1)^n - x \right| + \left| x - (-1)^{n+1} \right| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Esto es absurdo pues para cualquier n número par,

$$\left| (-1)^n - (-1)^{n+1} \right| = \left| 1 + 1 \right| = 2.$$

2-2.2 Proposición

Si una sucesión de números reales (x_n) es convergente, entonces el límite es único.

Demostración

Supongamos que (x_n) converge a los números x e y (con $x \neq y$), entonces tomamos $r > 0$ tal que $N(x,r) \cap N(y,r) = \varnothing$ (Capítulo 1, Ejemplo 2). Por la definición de límite, para dicho número r

existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in N(x,r)$, y
existe $n'_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n'_0$ entonces $x_n \in N(y,r)$.

Esto es absurdo, pues si $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ se tiene que

$$x_n \in N(x,r) \cap N(y,r).$$

2-2.3 Definición

Una sucesión (x_n) es **sucesión fundamental** o sucesión de Cauchy si para todo $r > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales mayores o iguales que n_0 se verifica que $|x_n - x_m| < r$. Es decir:

(x_n) es de Cauchy si y sólo si para todo $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $|x_n - x_m| < r$.

2-2.4 Proposición

a) Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

b) Toda sucesión de Cauchy es una sucesión acotada.

c) Toda sucesión convergente es una sucesión acotada.

Demostración

a) Supuesto que (x_n) converge a x, para cada $r > 0$ sea $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \frac{r}{2}$.

Si $n,m \geq n_0$ se tiene que $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$,

luego, (x_n) es una sucesión de Cauchy.

b) Sea (x_n) una sucesión de Cauchy, para $r = 1$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n,m \geq n_0$ se verifica $|x_n - x_m| < 1$. Por tanto, si $n \geq n_0$ se tiene

$$|x_n| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Si $K = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}$ entonces se cumple que para todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene que $x_n \in [-K, K]$ y, por consiguiente, (x_n) es una sucesión acotada.

c) Es consecuencia inmediata de a) y b).

En **R** las sucesiones de Cauchy son convergentes, esta es una propiedad muy importante de **R**.

2-2.5 Teorema de completitud de R

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de números reales, entonces (x_n) es una sucesión convergente.

Demostración

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy, entonces por la proposición anterior sabemos que es acotada. Construimos las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por:

$$a_m = \inf\{x_n : n > m\} \quad y \quad b_m = \sup\{x_n : n > m\}.$$

Claramente $a_m \leq a_{m+1}$ y $b_m \geq b_{m+1}$ para todo $m \in \mathbf{N}$, luego

$$[a_m, b_m] \supset [a_{m+1}, b_{m+1}]$$

y, por el principio de Cantor , dado que $|b_m - a_m|$ tiende a cero cuando m tiende a $+\infty$, se tiene que la intersección de los intervalos $[a_m, b_m]$ es un único punto que llamamos $p \in \mathbf{R}$. Veamos que $p = \lim_n x_n$.

Por ser una sucesión de Cauchy, para $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n,m \geq n_0$ entonces $|x_n - x_m| < r$.

Si fijamos $m = n_0$ entonces para $n \geq n_0$ se tiene que $|x_n - x_{n_0}| < r$, o

$$x_{n_0} - r \leq x_n \leq x_{n_0} + r \ ,$$

por tanto, $\quad |a_{n_0} - x_{n_0}| < r \quad y \quad |b_{n_0} - x_{n_0}| < r.$

Luego, para todo $n \geq n_0$

$$|p - x_n| \leq |b_{n_0} - a_{n_0}| \leq |b_{n_0} - x_{n_0}| + |x_{n_0} - a_{n_0}| < 2r,$$

es decir, $\lim_n x_n = p$.

Observación: Este importante teorema nos permite asegurar la convergencia de una sucesión sin más que comprobar que es de Cauchy, lo que elimina la dificultad de conocer previamente el límite. (Aunque a veces es más difícil ver que es de Cauchy que calcular el límite, sobre todo si el término general es complicado, por ejemplo sucesiones racionales). Los espacios que tienen la propiedad de que toda sucesión de Cauchy es convergente se les denomina **espacios completos**. Así pues, aludiremos a este teorema diciendo que **R** es completo.

Ejemplo 5

La sucesión $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2})$ es convergente.

En este caso, dada la dificultad del cálculo del límite, veamos que la sucesión es de Cauchy y, como **R** es completo, convergente.

Sea $r > 0$, tenemos que encontrar n_0 tal que si $p,q \geq n_0$ entonces

$$|a_p - a_q| < r.$$

Supongamos $q > p$

$$|a_p - a_q| = \left| \sum_{k=p+1}^{q} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=p+1}^{q} \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right| \left| \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2} \right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right),$$

ya que $\left|\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\right| < 1$ y $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} > 0$.

Entonces,

$$|a_p - a_q| \leq \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} - \ldots + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{(q+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(q+1)^2} \leq \frac{1}{(p+1)^2},$$

al ser $p \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{n_0^2}$, con lo que $|a_p - a_q| < \frac{1}{n_0^2}$.

Al tomar $n_0 \geq \sqrt{\frac{1}{r}}$, lo que siempre se puede hacer por el Principio de Arquímedes, resulta $|a_p - a_q| < r$. Luego, aunque no lo conozcamos, se sabe que existe el límite.

Ejemplo 6

Comprobemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Sea $r > 0$, veamos si existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $p \geq n_0$ entonces $\left|\frac{p-1}{p} - 1\right| < r$.

$$\left|\frac{p-1}{p} - 1\right| = \left|\frac{p-1-p}{p}\right| = \frac{1}{p}$$

como p es tal que $p \geq n_0$, entonces será $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{n_0}$. Basta con tomar $n_0 > \frac{1}{r}$ y se obtiene

$$\left|\frac{p-1}{p} - 1\right| \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{1/r} = r\,.$$

Ejemplo 7

Si (a_n) es una sucesión acotada de números reales y (b_n) es una sucesión convergente a cero, entonces $\lim_{n} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Por ser (a_n) una sucesión acotada existe $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Sea $r > 0$, por ser (b_n) una sucesión convergente a cero existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $p \geq n_0$ entonces $|b_p| < \frac{r}{M}$. Al considerar este mismo $n_0 \in \mathbf{N}$ se tiene que si $p \geq n_0$ entonces

$$|a_p \cdot b_p| \leq |a_p|\ |b_p| < M \cdot \frac{r}{M} = r.$$

Luego, $(a_n \cdot b_n)$ converge a cero.

2-2.6 Proposición

Toda sucesión de números reales (x_n) monótona creciente (respectivamente monótona decreciente) y acotada superiormente (respectivamente acotada inferiormente) es convergente.

Demostración

Sean (x_n) una sucesión monótona creciente y acotada superiormente y $x = \{\sup x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Veamos que $x = \lim_n x_n$. En efecto, al ser $x = \{\sup x_n : n \in \mathbf{N}\}$, dado $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x - r < x_{n_0}$ y, por la monotonía, para todo $p \geq n_0$ se tiene que $x_{n_0} \leq x_p \leq x$. Por tanto,

$$x - r < x_{n_0} \leq x_p \leq x < x + r,$$

luego, $| x_p - x | < r$ para todo $p \geq n_0$. Así pues, (x_n) converge a x.

La demostración del caso decreciente es análoga.

Ejemplo 8

Sea (x_n) una sucesión acotada. Se considera $y_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ para todo $m \in \mathbf{N}$. Veamos que la sucesión (y_m) es convergente.

Sea M una cota inferior de (x_n), entonces M es también cota inferior de (y_m). Además, $y_{m+1} = \sup\{x_n : n \geq m+1\} \leq \sup\{x_n : n \geq m\} = y_m$, por tanto, es monótona decreciente, luego es convergente.

Ejemplo 9

Calculamos el límite de la sucesión $x_n = \frac{1}{n^3} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2 + e^{n^2}}{2}\right)$.

La sucesión (x_n) es el producto de las sucesiones:

$$y_n = \frac{1}{n^3} \quad \text{y} \quad z_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n^2 + e^{n^2}}{2}\right) .$$

La sucesión (y_n) converge a cero, mientras que la sucesión (z_n) está acotada, ya que

$$\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n^2 + e^{n^2}}{2}\right) \right| < 1$$

luego por el Ejemplo 7, $\lim_n x_n = 0$.

Sección 2-3

Propiedades de los límites

2-3.1 Propiedades Aritméticas de los Límites

Sean (x_n) una sucesión que converge a x e (y_n) otra sucesión que converge a y. Entonces

i) $\lim_n (x_n + y_n) = x + y$.

ii) $\lim_n (\lambda x_n) = \lambda x$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.

iii) $\lim_n (x_n - y_n) = x - y$.

iv) $\lim_n (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

v) Si existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $y_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ e $y \neq 0$, entonces

$$\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Demostración

i) Dado $r > 0$ existen n_1 y $n_2 \in \mathbf{N}$ tales que $|x_n - x| < \frac{r}{2}$ para $n \geq n_1$ y $|y_n - y| < \frac{r}{2}$ para $n \geq n_2$, por consiguiente

$$|x_n + y_n - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

para todo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, luego $\lim_n (x_n + y_n) = x + y$.

ii) Si $\lambda = 0$ el resultado es trivial. Supuesto que $\lambda \neq 0$. Por ser $\lim_n x_n = x$, resulta que dado $r > 0$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $|x_n - x| < \frac{r}{|\lambda|}$ si $n \geq n_0$ y, por tanto, $|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda|\,|x_n - x| < |\lambda| \cdot \frac{r}{|\lambda|} = r$, para todo $n \geq n$. En consecuencia, $\lim_n \lambda x_n = \lambda x$.

iii) por i) y ii) se tiene que $\lim_n (x_n - y_n) = x - y$.

iv) La sucesión (x_n) es acotada por tanto existe un número real $H > 0$, tal que $|x_n| \leq H$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Consideremos un número real $c > |y|$.

Dado $r > 0$, por ser $x = \lim_n x_n$,

$$\text{existe } n_1 \in \mathbf{N} \text{ tal que } |x_n - x| < \frac{r}{2c} \text{ para } n \geq n_1,$$

y, por ser $y = \lim_n y_n$,

$$\text{existe } n_2 \in \mathbf{N} \text{ tal que } |y_n - y| < \frac{r}{2H} \text{ para } n \geq n_2.$$

Al tomar $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ se tiene que:

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| =$$

$$= |x_n|\,|y_n - y| + |x_n - x|\,|y| < H\frac{r}{2H} + \frac{r}{2c}c = r.$$

v) Por ser $\lim_n y_n = y \neq 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ si $n \geq n_0$. Como $|y| = |y - y_n + y_n| \leq |y - y_n| + |y_n|$, resulta que

$$|y_n| \geq |y| - |y - y_n| > |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2} > 0,$$

y

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|} \quad \text{si } n \geq n_0.$$

Al aplicar las propiedades anteriores se tiene que

$$\lim_n \left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right) = \lim_n \left(\frac{1}{y_n} \cdot \frac{y - y_n}{y}\right) = 0,$$

pues $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ está acotada; y $\lim_n \frac{y - y_n}{y} = \frac{1}{y} \lim_n (y - y_n) = 0$.

Por tanto, $\lim_n \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$.

Al aplicar la propiedad iv) se deduce que

$$\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \lim_n x_n \cdot \lim_n \frac{1}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

2-3.2 Proposición

Sea (x_n) una sucesión convergente a x y sea $h \in \mathbf{R}$ tal que $h < x$, entonces existe n_0 tal que $h < x_n$ para todo $n \geq n_0$.

Demostración

Al ser una sucesión convergente, para el número $r = \frac{x-h}{2}$ y el entorno $N(x,r)$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se verifica que x_n pertenece a $N(x,r)$, es decir, $|x_n - x| < \frac{x-h}{2}$ o $\frac{h-x}{2} < x_n - x < \frac{x-h}{2}$. Por tanto,

$$x_n > x + \frac{h-x}{2} = \frac{h+x}{2} > \frac{h+h}{2} = h, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Observación: Si f es una función continua de **R** en **R** y (x_n) es una sucesión convergente a x entonces $f(x_n)$ converge a $f(x)$. Esto se formaliza más adelante en la Proposición 4-1.4. Recuérdese que entre las funciones continuas están las funciones seno, coseno, valor absoluto, logaritmo, exponencial y las potencias.

2-3.3 Regla del Sandwich

Sean $(x_n), (y_n), (z_n)$ tres sucesiones. Si existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

y $\lim_n x_n = \lim_n z_n = k$, entonces la sucesión (y_n) es convergente y su límite es precisamente k.

La demostración es fácil de realizar y queda como ejercicio para el lector.

Sección

2-4

Límites infinitos

La existencia de sucesiones no acotadas obliga a introducir los puntos, $+\infty$ y $-\infty$, contruyéndose el conjunto $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ denominado **recta real ampliada**. Estos elementos verifican que

$$-\infty < x < +\infty \text{ , para todo } x \in \mathbf{R},$$

es decir, son cota inferior ($-\infty$) y superior ($+\infty$) de toda la recta real.

La suma y el producto de $\mathbf{R}$ se extienden a $\overline{\mathbf{R}}$ con las siguientes reglas

$x+(+\infty) = (+\infty)+x = +\infty$ para todo $x \in \overline{\mathbf{R}}$ y $x \neq -\infty$.

$x+(-\infty) = (-\infty)+x = -\infty$ para todo $x \in \overline{\mathbf{R}}$ y $x \neq +\infty$.

$-(+\infty) = -\infty$ y $-(-\infty) = +\infty$.

$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$ y $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ para todo $x > 0$ de $\mathbf{R}$.

$-x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-x) = -\infty$ y $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$ para todo $x < 0$ de $\mathbf{R}$.

$(+\infty)^{-1} = (-\infty)^{-1} = 0$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ y $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

Sin embargo, las siguientes expresiones no están definidas

$$+\infty+(-\infty),\ (-\infty)+(+\infty),\ 0 \cdot (+\infty),\ 0 \cdot (-\infty),$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0},$$

y son indeterminaciones. Se observa que $\overline{\mathbf{R}}$ tiene una estructura algebraica muy pobre y, desde luego, no es ni un grupo ni un cuerpo.

2-4.1 Definición

Se dice que una sucesión de números reales (x_n) tiene por límite $+\infty$, y se escribe $\lim_n x_n = +\infty$, si para todo $r \in \mathbf{R}$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n > r$. Es decir, $\lim_n x_n = +\infty$ si y sólo si para todo $r \in \mathbf{R}$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n > r$.

2-4.2 Definición

Se dice que una sucesión de números reales (x_n) tiene por límite $-\infty$, y se escribe $\lim_n x_n = -\infty$, si para todo $r \in \mathbf{R}$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n < r$. Es decir, $\lim_n x_n = -\infty$ si y sólo si para todo $r \in \mathbf{R}$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n < r$.

Ejemplo 10

Veamos que el $\lim_n n^2 = +\infty$. En efecto, dado $r \in \mathbf{R}$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $r \leq n_0$ y, por tanto,

$$r \leq n_0 \leq n_0^2 \leq n^2 \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Ejemplo 11

Cualquier sucesión (x_n) monótona decreciente de números reales no acotada inferiormente verifica $\lim_n x_n = -\infty$. En efecto, para cada número $r \in \mathbf{R}$, como el conjunto $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ no está acotado inferiormente, entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x_{n_0} < r$. Como (x_n) es monótona decreciente se verifica que si $n \geq n_0$, entonces $x_n < x_{n_0} < r$.

La siguiente proposición es una extensión de las propiedades algebraicas de los límites mostradas en la Proposición 2-3.1.

2-4.3 Proposición

Si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones de números reales tales que

$$\lim_n x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_n y_n = y,$$

con x e y pertenecientes a $\overline{\mathbf{R}}$. Entonces se tiene:

i) Si $x = +\infty$ (respectivamente, $x = -\infty$) e y es un número real, entonces

$$\lim_n (x_n + y_n) = +\infty \text{ (respectivamente, } -\infty).$$

ii) Si $x = y = +\infty$ (respectivamente, $-\infty$), entonces

$$\lim_n (x_n + y_n) = +\infty \quad \text{(respectivamente, } -\infty\text{)}.$$

iii) Si $x = +\infty$ (respectivamente, $-\infty$) e $y > 0$, entonces

$$\lim_n x_n \cdot y_n = +\infty \quad \text{(respectivamente, } -\infty\text{)}.$$

iv) Si $x = +\infty$ (respectivamente, $-\infty$) e $y < 0$, entonces

$$\lim_n x_n \cdot y_n = -\infty \quad \text{(respectivamente, } +\infty\text{)}.$$

v) Si $x=+\infty$ ó $x=-\infty$ y existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$, entonces

$$\lim_n \frac{1}{x_n} = 0.$$

vi) Si $x = 0$ y $x_n > 0$ (respectivamente, $x_n < 0$) para todo $n \in \mathbf{N}$ entonces

$$\lim_n \frac{1}{x_n} = +\infty \quad \text{(respectivamente, } -\infty\text{)}.$$

Sugerimos que el lector realice la demostración como ejercicio.

Para determinar el límite de ciertas sucesiones es muy útil el siguiente criterio.

2-4.4 Criterio de Stolz

Si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones de números reales tales que :

i) (y_n) es monótona creciente y $\lim_n y_n = +\infty$.

ii) $\lim_n \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L \in \overline{\mathbf{R}}$.

Entonces $\lim_n \dfrac{x_n}{y_n} = L$.

Ejemplo 12

Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que $\lim_n a_n = a \in \overline{\mathbf{R}}$. Se prueba que

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a \quad ,$$

si aplicamos el criterio de Stolz a las sucesiones siguientes

$$x_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \quad \text{e} \quad y_n = n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se cumple que y_n es creciente con $\lim_n y_n = \lim_n n = +\infty$ y

$$\lim_n \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_n \frac{a_1 + \ldots + a_n - (a_1 + \ldots + a_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_n \frac{a_n}{1} = a.$$

Ejemplo 13

Sea (x_n) una sucesión de números reales que converge a $x \neq 0$ y sea

$$y_n = \frac{n^2 x_n + an + b}{n^2 x_n + cn + d}.$$

Veamos que $\lim_n y_n = 1$. En efecto, y_n se reescribe como

$$y_n = \frac{x_n + \frac{an}{n^2} + \frac{b}{n^2}}{x_n + \frac{cn}{n^2} + \frac{d}{n^2}},$$

y al aplicar las propiedades algebraicas de los límites se tiene que

$$\lim_n y_n = \frac{\lim_n \left(x_n + \frac{an}{n^2} + \frac{b}{n^2}\right)}{\lim_n \left(x_n + \frac{cn}{n^2} + \frac{d}{n^2}\right)} = \frac{\lim_n x_n + \lim_n \frac{an}{n^2} + \lim_n \frac{b}{n^2}}{\lim_n x_n + \lim_n \frac{cn}{n^2} + \lim_n \frac{d}{n^2}} = 1.$$

Sección

2-5 Límites inferior y superior

Sea (x_n) una sucesión de números reales. Denotamos por

$$a_m = \sup\{x_n : n \geq m\} \quad \text{y} \quad b_m = \inf\{x_n : n \geq m\}$$

donde a_m y b_m pertenecen a $\overline{\mathbf{R}}$ para todo $m \in \mathbf{N}$, pues si la sucesión original es no acotada entonces a_m y b_m pueden ser $+\infty$ o $-\infty$.

2-5.1 Definición

El límite inferior de una sucesión de números reales (x_n) es

$$\liminf x_n = \sup\{ b_m : m \in \mathbf{N} \} = \sup\{\inf\{ x_n : n \geq m\} : m \in \mathbf{N}\}.$$

El límite superior de una sucesión de números reales (x_n) es

$$\limsup x_n = \inf\{ a_m : m \in \mathbf{N}\} = \inf\{ \sup\{ x_n : n \geq m\} : m \in \mathbf{N}\}.$$

2-5.2 Proposición

Para cualquier sucesión de números reales (x_n) se verifica que

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

Demostración

Si $p \leq q$, entonces $\{x_n : n \geq q\} \subset \{x_n : n \geq p\}$,

por tanto, $b_p \leq b_q \leq a_q \leq a_p$. Luego, $b_k \leq a_h$ para todo $k, h \in \mathbf{N}$.

Al fijar $k \in \mathbf{N}$ se tiene que $b_k \leq \inf a_h = \limsup x_n$,

y al tomar supremos se tiene que $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

Los límites inferior y superior están estrechamente relacionados con el concepto de límite, como vemos en el siguiente teorema.

2-5.3 Teorema

Una sucesión (x_n) de números reales es convergente en $\mathbf{R}$ si y sólo si los límites superior e inferior son reales y coinciden.

Demostración

Inicialmente demostramos que es condición necesaria.

Supuesto que $\lim_n x_n = x \in \mathbf{R}$, para cada número real positivo r existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y se verifica que $x - r < x_n < x + r$, por tanto,

$$x - r < b_m \leq a_m < x + r \quad \text{para} \quad m \geq n_0,$$

y

$$x - r \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq x + r \quad \text{para todo } r > 0.$$

Luego,

$$\liminf x_n = \limsup x_n = x .$$

A continuación, demostramos la suficiencia. Se supone que

$$\liminf x_n = \limsup x_n = x \quad \text{y} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Sea $r > 0$, puesto que $x - r < \liminf x_n$, entonces existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $x - r < b_{n_1}$. Luego, $x - r < x_n$ para todo $n \geq n_1$.

Análogamente, existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tal que $x_n < x + r$ para todo $n \geq n_2$.

Así pues, si $n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$, entonces para cada $n \geq n_0$ se tiene que $|x - x_n| < r$. Por tanto, $\lim_n x_n = x$.

Ejemplo 14

La sucesión 0,1,0,1,0,1,0,1 ... tiene por límite superior 1 y por límite inferior 0, por consiguiente, esta sucesión no tiene límite.

Ejemplo 15

Calculemos el límite superior e inferior de la sucesión

$$x_n = \frac{1}{k} \text{ si } n = 4k-3 \quad , \quad x_n = 1 \text{ si } n = 4k-2,$$

$$x_n = 3 - \frac{1}{k} \text{ si } n = 4k-1 \quad \text{y} \quad x_n = 2 \text{ si } n = 4k.$$

Los primeros términos de la sucesión son

$$1, 1, 2, 2, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 2, \frac{1}{3}, 1, \frac{8}{3}, 2 \ldots$$

y para $m \geq 8$ el supremo $a_m = \sup\{x_n: n \geq m\}$ es el término primero de expresión $3 - \frac{1}{k}$ que aparezca y el ínfimo $b_m = \inf\{x_n: n \geq m\}$ es 0 puesto que $0 = \inf\{\frac{1}{k}: k \in \mathbf{N}\}$. Luego, $\lim\sup x_n = 3$ y $\lim\inf x_n = 0$.

Problemas Propuestos

1) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_n \frac{3n^2+2}{5n-1}, \quad \lim_n \frac{2n^3-5n-2}{-n^3-n^2+2n+1}, \quad \lim_n \frac{3n^2-2n+3}{n^5+2n^4-n^2+1},$$

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+5}}, \quad \lim_n (\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}) .$$

2) Calcular $\lim_n \frac{n!}{n^n}$.

3) Mediante la definición de límite, comprobar que las sucesiones

$$\text{a)} \quad (a_n) = \left(\frac{n-1}{2n}\right) \quad \text{y} \quad \text{b)} \quad (b_n) = \left(\frac{3n+2}{n-1}\right)$$

son sucesiones convergentes.

4) Demostrar, mediante la definición de límite, que no existe límite de la sucesión de números racionales (a_n), definida por :

$$a_n = 1 \quad \text{si n es impar.}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{si n es par}$$

5) Calcúlese el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión

$$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right).$$

Capítulo 3

Límites de Funciones

El objetivo principal del Análisis Matemático es el estudio de las funciones. A lo largo de este capítulo trataremos exclusivamente funciones reales de variable real, es decir, funciones definidas en un subconjunto de los números reales y que toman valores en **R**.

Uno de los conceptos más importantes en Análisis Matemático es el de límite de una función en un punto, puesto que nos informa acerca del comportamiento de la función en las proximidades del punto.

De manera intuitiva, una función $f(x)$ tiende hacia un valor $\mathbf{l}$ cuando x tiende hacia un punto $\mathbf{a}$, si se puede conseguir que el valor de la función en un punto x sea tan próximo a $\mathbf{l}$ como se quiera, haciendo que el punto x esté suficientemente cerca de $\mathbf{a}$, pero distinto de $\mathbf{a}$. Lógicamente esto no sucede siempre, ni tampoco necesariamente, en todos los puntos del conjunto en el que está definida la función, por ejemplo, la función **signo de x**,

$$s(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{si } x \neq 0,$$

$$s(0) = 0,$$

no tiende a cero cuando x se aproxima a cero, ya que cuando x se acerca a cero por la derecha los valores de $s(x)$ se acercan a 1 mientras que cuando lo hace por la izquierda se acercan a -1. Esto se puede observar en la Figura 1.

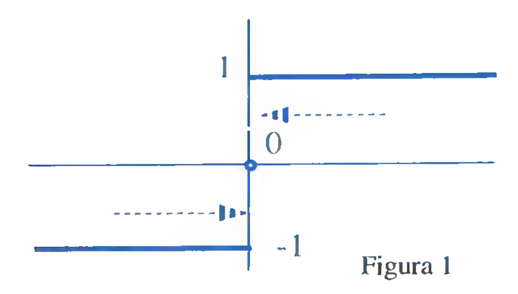


Figura 1

Por el contrario, si la función que consideramos es constante, es decir, f: **R**→**R** , verifica que f(x) = **c** para todo x∈**R** siendo **c** un número real, entonces la función f tiende a **c** al tender x hacia cualquier punto de **R.**

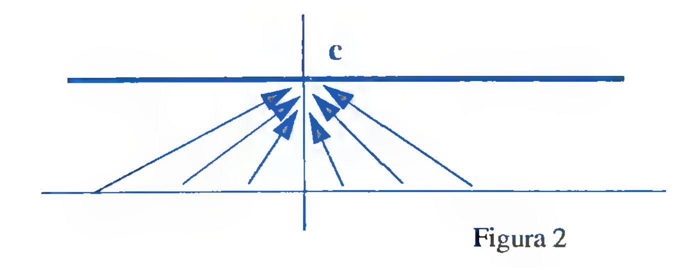


Figura 2

Sección

3-1

Límite de una función en un punto

En el Capítulo 1 se introdujeron las nociones de entorno de un número real, N(x), entorno reducido, N*(x), y punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbf{R}$.

Con objeto de dar una definición unificada de límite de una función en un punto extenderemos las nociones anteriores a la recta real ampliada $\overline{\mathbf{R}}$ considerando como entorno de $+\infty$, $N(+\infty)$, a toda semirrectas de la forma $(r,+\infty)$ y como entorno de $-\infty$, $N(-\infty)$, a toda semirrectas de la forma $(-\infty,r)$ con $r \in \mathbf{R}$.

Se observa que los entornos reducidos de $+\infty$ y $-\infty$ coinciden con sus entornos, además, se dice que $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ cuando éste no está acotado superiormente (respectivamente inferiormente).

En esta sección consideramos una función $f: A \to \mathbf{R}$ con $A \subset \overline{\mathbf{R}}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto de acumulación de A y $l \in \overline{\mathbf{R}}$.

3-1.1 Definición.

Se dice que una función f tiende a l, o que tiene por límite l, cuando x tiende hacia a y escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = l$, si para cada entorno N(l) existe un entorno N(a) tal que $f(x) \in N(l)$ para todo $x \in N^*(a) \cap A$.

A continuación se describe la definición para los distintos valores posibles de a y l:

- **Límite finito en un punto**: Si $a, l \in \mathbf{R}$,

1.- $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

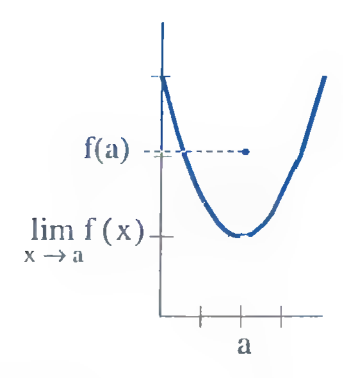


Figura 3

- **Límite infinito en un punto**: Si $a \in \mathbf{R}$ y $l \notin \mathbf{R}$,

2.- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ para todo $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

3.- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ para todo $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

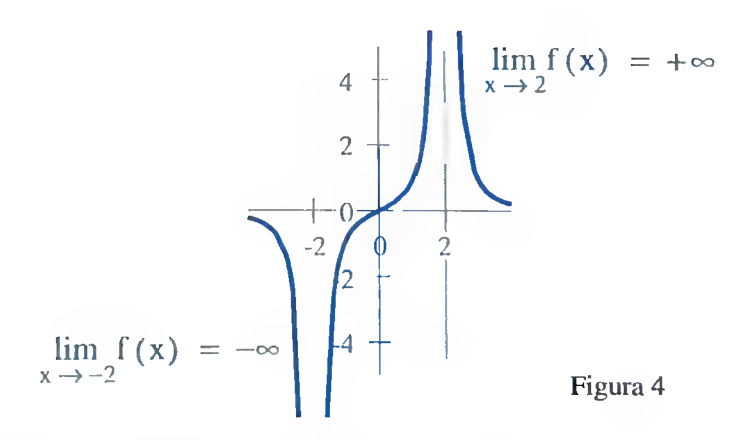


Figura 4

- **Límite finito en el infinito**: Si $a \notin \mathbf{R}$ y $l \in \mathbf{R}$,

4.- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $r \in \mathbf{R}$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $x < r$.

5.- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $r \in \mathbf{R}$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $x > r$.

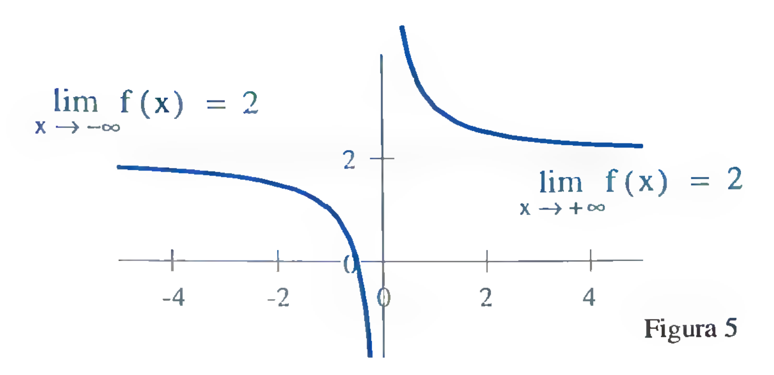


Figura 5

- **Límite infinito en el infinito**: Si $a \notin \mathbf{R}$ y $l \notin \mathbf{R}$,

6.- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) < r$ para todo $x \in A$ tal que $x < s$.

7.- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) > r$ para todo $x \in A$ tal que $x < s$.

8.- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) < r$ para todo $x \in A$ tal que $x > s$.

9.- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $s \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) > r$ para todo $x \in A$ tal que $x > s$.

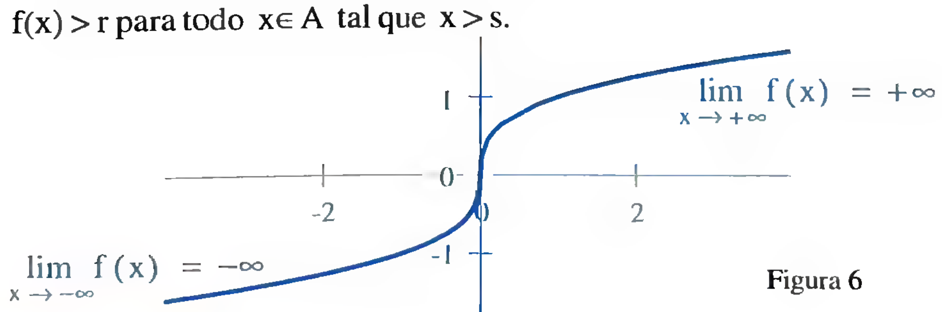


Figura 6

Ejemplo 1

Si $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función definida por $g(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbf{R}$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = a^2$ para todo $a \in \mathbf{R}$.

Basta ver que fijado un $a \in \mathbf{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ se encuentra un $\delta > 0$ tal que $|x^2 - a^2| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbf{R}$ tal que $0 < |x - a| < \delta$. Como

$$|x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x-a|\,|x+a| \leq |x-a|(|x| + |a|),$$

para todo $x \in \mathbf{R}$ tal que $0 < |x-a| < \delta \leq 1$, se tiene que

$$|x| = |x - a + a| \leq |x-a| + |a| < \delta + |a| \leq 1 + |a|, \quad \text{y}$$

$$|x^2 - a^2| < |x-a|(1 + |a| + |a|) = |x-a|(1 + 2|a|) < $$
$$< \delta(1 + 2|a|).$$

Al tomar $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\}$ resulta que $|x^2 - a^2| < \varepsilon$, y por tanto, $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$.

Al igual que los límites de las sucesiones de números reales, también se verifica la unicidad del límite de una función en un punto.

3-1.2 Proposición

Si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ entonces este límite es único.

Demostración

Supuesto que existen $l_1, l_2 \in \overline{\mathbf{R}}$ tales que

$$l_1 = \lim_{x \to a} f(x), \quad l_2 = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{y} \quad l_1 \neq l_2,$$

entonces se pueden encontrar dos entornos $N(l_1)$ y $N(l_2)$ tales que $N(l_1) \cap N(l_2) = \varnothing$ y, por tanto, existen $N_1(a)$ y $N_2(a)$ tales que $f(x) \in N(l_1)$ para todo $x \in N_1^*(a) \cap A$ y $f(x) \in N(l_2)$ para todo $x \in N_2^*(a) \cap A$. Como por otro lado

$$N_1^*(a) \cap N_2^*(a) \cap A = (N_1(a) \cap N_2(a) - \{a\}) \cap A \neq 0,$$

por ser $N_1(a) \cap N_2(a)$ un entorno de a y ser a un punto de acumulación de A, se tiene que para todo $x \in N_1^*(a) \cap N_2^*(a) \cap A$, y $f(x) \in N(l_1) \cap N(l_2)$, en contradicción de ser $N(l_1)$ y $N(l_2)$ disjuntos.

Sección

3-2 Límites laterales

En algunos casos sucede, como con la función "signo de x", que los valores que toma una determinada función $f(x)$ en puntos próximos a un cierto punto x_0, tienden a números reales diferentes según dichos puntos se encuentren a la derecha o a la izquierda del punto considerado x_0. Este hecho motiva la introducción de los denominados límites laterales, por la derecha o por la izquierda.

Para formalizar estas nociones, introducimos inicialmente el concepto de límites de una función $f:A\to\mathbf{R}$ $(A\subset\mathbf{R})$ relativo a un subconjunto $B\subset A$, en un punto de acumulación de B.

Denotamos por $f|_B$ a la restricción de la función f al conjunto B, es decir, $f|_B: B\to\mathbf{R}$ es la función definida por $f|_B(x) = f(x)$ para todo $x\in B$.

3-2.1 Definición

Sean $A\subset\mathbf{R}$, $f:A\to\mathbf{R}$, $B\subset A$ y $a\in \overline{\mathbf{R}}$ un punto de acumulación de B. Se dice que $l\in \overline{\mathbf{R}}$ es el límite de f relativo a B, o sobre B, en el punto a, y se denota

$$\lim_{x\in B,\, x\to a} f = l,$$

si la función $f|_B$ tiene por límite l cuando x tiende hacia a ,es decir, si

$$\lim_{x\to a} (f|_B)(x) = l.$$

3-2.2 Proposición

Dados $A\subset\mathbf{R}$, $f:A\to\mathbf{R}$ y $B\subset A$, si $a\in \overline{\mathbf{R}}$ es un punto de acumulación de B y existe $\lim_{x\to a} f = l$, entonces existe el límite de f relativo a B en el punto a y, además, $\lim_{x\in B,\, x\to a} f = l$.

Nótese que el recíproco no es cierto en general, puede existir límite relativo a un subconjuntos B de A en un punto $a \in \text{acum}(B) \subset A$ sin que exista el límite de la función en dicho punto. Vease el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Sea $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la función tal que a cada $x \in \mathbf{R}$ le hace corresponder f(x) igual al menor número entero mayor o igual que x. Veamos que no existe el límite de la función f cuando x tiende a un número entero cualquiera.

En efecto, sean z un número entero y los conjuntos

$$B_1 = \{ x \in \mathbf{R}: x > z \} \quad \text{y} \quad B_2 = \{ x \in \mathbf{R}: x < z \}.$$

Si existe $k \in \mathbf{R}$ tal que $k = \lim_{x \to z} f(x)$, entonces de la Proposición 3-2.2 resulta que

$$\lim_{x \in B_1, x \to z} f(x) = k = \lim_{x \in B_2, x \to z} f(x).$$

Esto es una contradicción, ya que

$$\lim_{x \in B_1, x \to z} f(x) = z + 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \in B_2, x \to z} f(x) = z,$$

puesto que

$$f|_{B_1}(x) = z + 1 \quad \text{para todo } x \in (z, z+1) \text{ y}$$

$$f|_{B_2}(x) = z \quad \text{para todo } x \in (z-1, z).$$

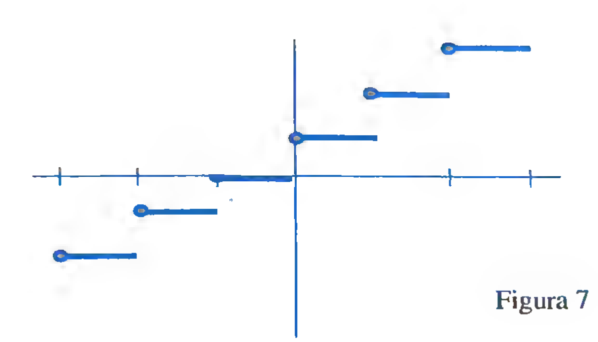


Figura 7

3-2.3 Proposición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto de acumulación de A y $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Entonces

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{n} f(x_n) = l$ para toda sucesión (x_n) de elementos de A distintos de a, tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Demostración

Si (x_n) es una sucesión de elementos de A distintos de a que converge al punto a, se tiene que a es un punto de acumulación del conjunto $B = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ y de la Proposición 3-2.2 se deduce que

$$l = \lim_{x \in B,\, x \to a} f(x) = \lim_{n} f(x_n).$$

Veamos que la condición es suficiente. En efecto, si f no tiende a l cuando x tiende hacia a, existiría un entorno N(l) tal que para todo entorno N(a) existe un $x \in N^*(a) \cap A$ tal que $f(x) \notin N(l)$. En particular, para cada $n \in \mathbf{N}$, existirá un elemento $x_n \in N^*(a, \frac{1}{n}) \cap A$, por tanto, perteneciente a A y distinto de a, tal que $f(x_n) \notin N(l)$. Por consiguiente, la sucesión (x_n) converge hacia a y la sucesión $(f(x_n))$ no converge a l, lo cual es una contradicción.

Nótese que efectivamente la sucesión que se acaba de construir converge hacia a, ya que para cada entorno N(a,r) existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$ y, por tanto, $|x_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < r$ y $x_n \in N(a,r)$, para todo $n \geq n_0$.

3-2.4 Definición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$ y $a \in \mathbf{R}$. Si a es un punto de acumulación del conjunto $A_i = (-\infty, a) \cap A$ y existe el límite de f relativo a A_i en el punto a, entonces a este límite se le denomina límite lateral por la izquierda de f en a y se le denota por $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

Análogamente, si a es un punto de acumulación del conjunto $A_d = (a, +\infty) \cap A$ y existe el límite de f relativo a A_d en el punto a, a este límite se le denomina límite lateral por la derecha de f en a y se le

denota por $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

Los límites laterales por la izquierda y por la derecha de f en a, también se denotan por f(a-) y f(a+) respectivamente, denominándose salto de la función f en el punto a, a la diferencia

$$f(a+) - f(a-),$$

si estos límites laterales existen y son ambos finitos.

Según los distintos valores posibles de los límites laterales y teniendo en cuenta la forma de los entornos correspondientes, de la definición anterior resultan las caracterizaciones siguientes:

- **Límites laterales finitos**: Si $l \in \mathbf{R}$.

1.- $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ que cumpla $0 < a - x < \delta$.

2.- $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ que cumpla $0 < x - a < \delta$.

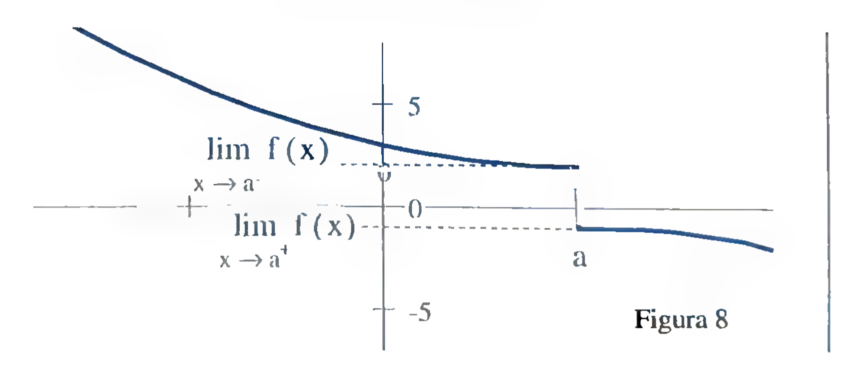


Figura 8

- **Límites laterales infinitos**:

3.- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ para todo $x \in A$ que cumpla $0 < a - x < \delta$.

4.- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < r$ para todo $x \in A$ que cumpla $0 < x - a < \delta$.

5.- $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ para todo $x \in A$ que cumpla $0 < a - x < \delta$.

6.- $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si y sólo si para cada $r \in \mathbf{R}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > r$ para todo $x \in A$ que cumpla $0 < x - a < \delta$.

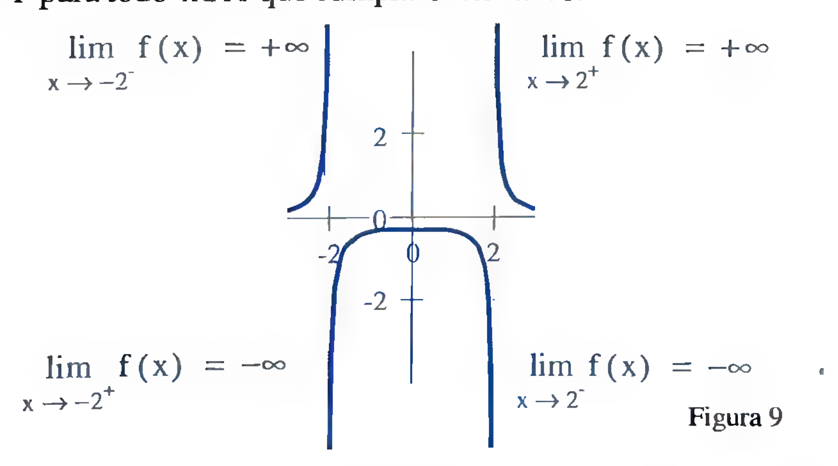


Figura 9

El límite de una función en un punto de $\mathbf{R}$ existe si y sólo si existen los límites laterales de la función en dicho punto y estos coinciden.

3-2.5 Proposición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$ y $a \in \mathbf{R}$ un punto de acumulación de los conjuntos A_i y A_d de la definición anterior. Entonces existe $\lim_{x \to a} f(x) = l$ $(l \in \mathbf{R})$ si y sólo si existen los límite laterales de f en a y verifican la igualdad

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l = \lim_{x \to a^+} f(x) .$$

Demostración

De la Proposición 3-2.2 resulta inmediatamente que si existe el límite

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

entonces existen los límites laterales de f en a. Estos coinciden y su valor común es l.

Veamos el recíproco. Supuesto que existen los límites laterales de f en a y que estos coinciden, $l \in \mathbf{R}$, su valor común, entonces para cada entorno N(l) existen $N_1(a)$ y $N_2(a)$ tales que $f(x), f(y) \in N(l)$ para todo $x \in N_1(a) \cap A_i$ y todo $y \in N_2(a) \cap A_d$.

Por consiguiente, existe $N(a) = N_1(a) \cap N_2(a)$ tal que $f(z) \in N(l)$ para todo $z \in N^*(a) \cap A$, ya que

$N^*(a) \cap A = N(a) \cap (A_i \cup A_d) =$

$= (N(a) \cap A_i) \cup (N(a) \cap A_d) \subset (N_1(a) \cap A_i) \cup (N_2(a) \cap A_d)$.

Ejemplo 3

La función **parte entera de x** definida para cada $x \in R$ por $f(x) = [x] = n$, siendo n el mayor número entero tal que $n \leq x < n + 1$, es una función que no tiene límite en ningún punto correspondiente a un número entero, aunque sí posee límites laterales en esos puntos

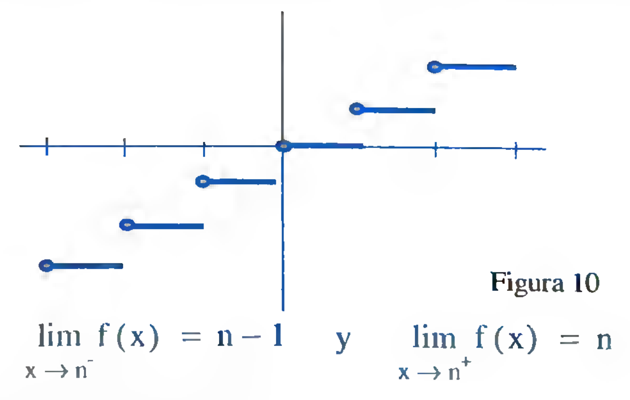


Figura 10

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to n^+} f(x) = n$$

para todo número entero $n \in \mathbf{Z}$.

Ejemplo 4

La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

no tiene límite en $x = -1$. La restricción de f al conjunto $\{x \in \mathbf{R}: -1 \leq x\}$ es la función idénticamente cero y

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0,$$

mientras que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

como se ve a continuación. Por consiguiente, no existe $\lim_{x \to -1} f(x)$ ya que los límites laterales de f en -1 no coinciden.

Veamos que $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$. Dado un número real r se tiene que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < -1 - x < \delta$ entonces $f(x) = \dfrac{1}{x+1} < r$.

Si $r < 0$, basta tomar $\delta = -\dfrac{1}{r}$ ya que si $0 < -1 - x < \delta$ entonces

$$\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{-1-x} < -\frac{1}{\delta} < r.$$

Si $r \geq 0$ entonces para cualquier $\delta > 0$ se cumple.

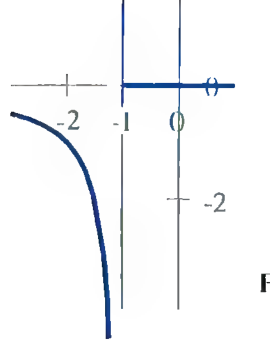


Figura 11

Sección

3-3 Propiedades de los límites

Además de las propiedades ya estudiadas de los límites, se estudian otras como las propiedades relativas a la acotación inferior y superior, así como las propiedades aritméticas de los límites, que son de gran utilidad práctica en el cálculo de los mismos.

3-3.1 Proposición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ y $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto de acumulación de A, y supongamos que existe $l = \lim_{x \to a} f(x)$.

- Si $l < k \in \mathbf{R}$, entonces existe un entorno $N(a)$ de a tal que $f(x) < k$ para todo $x \in N^*(a) \cap A$.

- Si $l > k \in \mathbf{R}$ entonces existe un entorno $N(a)$ de a tal que $f(x) > k$ para todo $x \in N^*(a) \in A$.

Demostración

Supuesto que k es un número real tal que $l < k$. Si $l = -\infty$ el resultado se deduce trivialmente de la definición de límite. Así pues, se supone que $l \neq -\infty$. Dado $\varepsilon = k - l$, que es evidentemente mayor que cero por ser $l < k$, existe, por ser $\lim_{x \to a} f(x) = l$, un entorno $N(a)$ tal que $f(x) \in N(l, \varepsilon)$ para todo $x \in N^*(a) \cap A$ y, por tanto, para todo $x \in N^*(a) \cap A$ se tiene que

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

y, por consiguiente, $f(x) < l + \varepsilon = l + k - l = k$.

De manera similar, se prueba el resto de la proposición.

3-3.2 Proposición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f, g: A \rightarrow \mathbf{R}$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto de acumulación de A. Si existen

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = m,$$

entonces $l \leq m$.

Este resultado se obtiene de la Proposición 3-3.1 al razonar por reducción al absurdo.

3-3.3 Proposición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f,g,h: A \to \mathbf{R}$ tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A$ y $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto de acumulación de A.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = k$, entonces existe $\lim_{x \to a} g(x)$ y este límite es k.

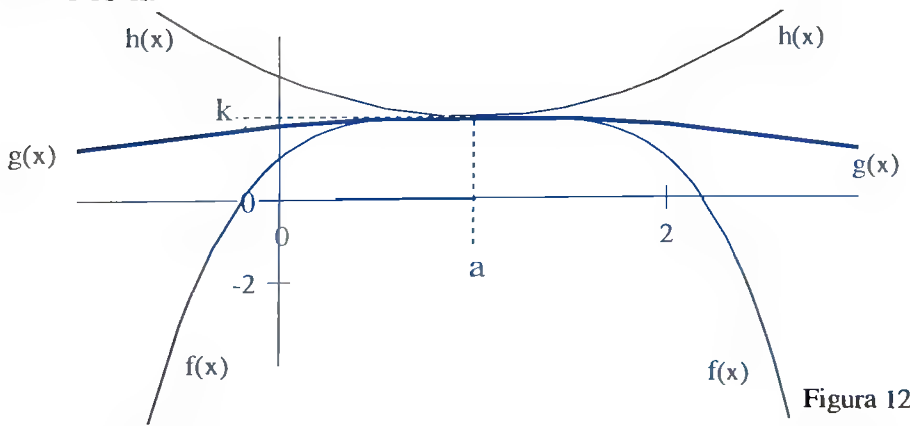


Figura 12

Demostración

Sea $N(k)$ un entorno de k. Por ser $k = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$, existen $N_1(a)$ y $N_2(a)$ tales que $f(x)$, $h(y) \in N(k)$ para todo $x \in N_1{}^*(a) \in A$ y todo $y \in N_2{}^*(a) \in A$.

Por tanto, $N(a) = N_1(a) \cap N_2(a)$ es un entorno de a y, además, $g(x) \in N(k)$ para todo $x \in N^*(a) \cap A$, ya que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $f(x), h(x) \in N(k)$. Por consiguiente,

$$\lim_{x \to a} g(x) = k.$$

De las propiedades aritméticas de los límites de sucesiones, aplicando la proposición 3-2.3, se deducen inmediatamente las propiedades aritméticas de los límites de funciones que se enuncian a continuación.

3-3.4 Proposición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f,g: A \to \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un punto de acumulación de A y supongamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = k \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = m,$$

donde $k, m \in \overline{\mathbf{R}}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

i) $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = k+m,$

ii) $\lim_{x \to a} (f-g)(x) = k-m,$

iii) $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = k \cdot m,$

iv) $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{k}{m},$

siempre que estén definidos los segundos miembros, y lo esté la función $\frac{f}{g}$ en un entorno del punto a.

Observación: Las anteriores igualdades que constituyen las propiedades aritméticas de los límites son válidas únicamente cuando cada uno de los miembros de la igualdad tiene sentido. Así pues, si los valores k y m son dos números reales, las igualdades tienen sentido salvo la cuarta propiedad en el caso de que $m = 0$, puesto que $\frac{k}{0}$, si $k \neq 0$, y $\frac{0}{0}$ son expresiones que no tienen sentido.

Si alguno de los valores k o m es infinito, las igualdades no tienen sentido si se produce alguna de las siguientes expresiones

$$\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \cdot \infty$$

que son denominadas indeterminaciones.

Sección

3-4

Límites de las funciones polinómicas y racionales

Mediante la aplicación directa de las propiedades aritméticas de los límites, establecidas en la Proposición 3-3.4, se determinan los límites de las funciones polinómicas y racionales. A continuación se realizan los cálculos de estos límites.

3-4.1 Proposición

Si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es una función constante, $f(x) = c$ para todo $x\in\mathbf{R}$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = c$, para todo $a\in\overline{\mathbf{R}}$.

3-4.2 Proposición

Si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es la identidad, $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbf{R}$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = a, \text{ para todo } a\in\overline{\mathbf{R}}.$$

3-4.3 Proposición

Si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es función polinómica $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = a_n a^n + ... + a_1 a + a_0 = f(a)$, para todo $a\in\mathbf{R}$.

Esta proposición se obtiene de la combinación de las anteriores Proposiciones 3-4.1 , 3-4.2 y 3-3.4

3-4.4 Proposición

Si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es $f(x)=x^n$ para todo $x\in\mathbf{R}$, con $n\in\mathbf{N}$ y $n\geq 1$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = (-1)^n\infty.$$

Es decir,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = (-1)^n\infty.$$

Análogamente,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 .$$

3-4.5 Proposición

Si $a \in \mathbf{R}$ y $f:\mathbf{R}\text{-}\{a\} \to \mathbf{R}$ se define como $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$ para todo $x \in \mathbf{R}$, con $n \in \mathbf{N}$ y $n \geq 1$, entonces se cumple que

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad \text{si } n \text{ es par,}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad \text{si } n \text{ es par,}$$

y

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad \text{si } n \text{ es impar,}$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

En el caso de ser n impar no existe el límite,cuando x tiende hacia a, de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$, mientras que si n es par existe dicho límite y este es infinito.

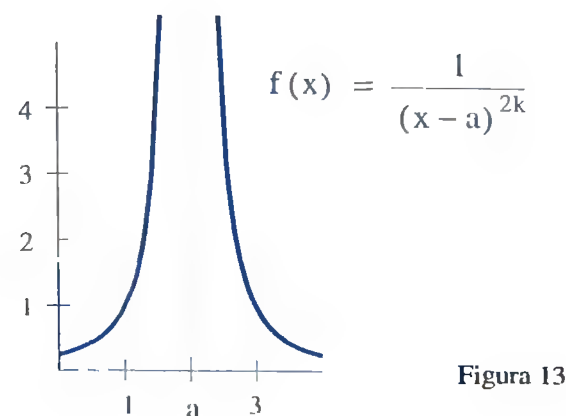


Figura 13

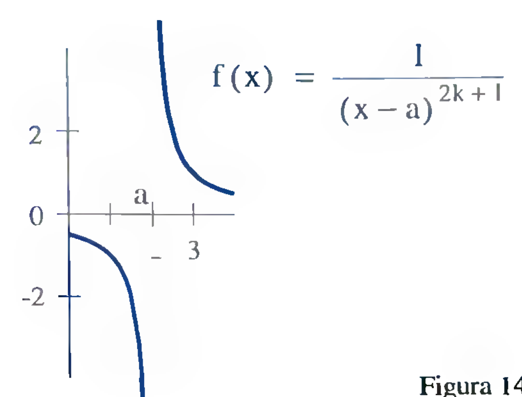


Figura 14

3-4.6 Proposición

Si $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ y $a_n \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ si } a_n > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ si } 0 > a_n.$$

Además:

Para n par, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si $a_n > 0$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si $0 > a_n$.

Para n impar, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si $a_n > 0$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si $0 > a_n$.

Demostración

Basta considerar la expresión escrita de la forma

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = \left(\lim_{x \to +\infty} x^n \right) a_n = +\infty \cdot a_n$$

3-4.7 Proposición

La función racional $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$, está definida para todo $a \in \mathbf{R}$ tal que $g(a) \neq 0$. De la Proposición 3-4.3 resulta, que en este caso, es decir, cuando $g(a) \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n a^n + \ldots + a_1 a + a_0}{b_m a^m + \ldots + b_1 a + b_0} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Si $a \in \mathbf{R}$ es tal que $g(a) = 0$, entonces $g(x) = (x-a)^p g_1(x)$, con $p \geq 1$ un número natural estrictamente menor que m y g_1 un polinomio tal que $g_1(a) \neq 0$. Igualmente, $f(x) = (x-a)^q f_1(x)$, con $q = 0$ ó $q \geq 1$ un número natural menor o igual que n y f_1 un polinomio tal que $f_1(a) \neq 0$.

Si $q \geq p$, entonces la fracción $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x) \cdot (x-a)^{q-p}}{g_1(x)}$ se reduce al primer caso estudiado pues $g_1(a) \neq 0$.

Si $p - q = r > 0$, entonces resulta que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{(x-a)^r \cdot g_1(x)} = \left(\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^r} \right) \cdot \frac{f_1(a)}{g_1(a)}.$$

Luego,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \cdot \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$$ en el caso de ser r par, y

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = (+\infty) \cdot \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = (-\infty) \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$$ en el caso de ser r impar.

Por otra parte, si $x \neq 0$ entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \dots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + \dots + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m}},$$

y al aplicar el apartado iv) de la Proposición 3-3.4 resulta que:

Si $n = m$, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si $n > m$, entonces $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = (+\infty) \cdot \frac{a_n}{b_m} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = (-\infty)^{n-m} \cdot \frac{a_n}{b_m} .$$

Si $n < m$, entonces $\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Problemas Propuestos

1) Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$.

2) Calcular $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x(x+1)} - x)$.

3) Calcular $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{|x|}{x}}$ y $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{|x|}{x}}$.

4) Calcular $\lim_{x \to +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$.

5) Calcular $\lim_{x \to 1^+} (\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{5}{x^3 - 1})$.

6) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

7) Calcular $\lim_{x \to \infty} x^2 (\sqrt{x^3 + 1} - x^2)$.

8) Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, siendo $a_n \neq 0$ y f una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, entonces $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{P(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{a_n x^n}$.

9) Probar que la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbf{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

no tiene límites por la derecha ni por la izquierda en ningún punto.

10) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}.$$

Hallar el límite por la derecha y por la izquierda en $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$. Comprobar los resultados mediante la técnica $(\varepsilon\text{-}\delta)$.

Capítulo 4

Funciones Continuas

Como se ha visto en el Capítulo 3, para que exista el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia un punto a, no es necesario que la función esté definida en dicho punto. Por otra parte, ese límite puede no existir y, además, en el caso de que exista y que la función sí esté definida en el punto a, no se puede asegurar que el límite coincida con el valor de la función en el punto a. Existen funciones en las que estas circunstancias patológicas no se dan, son las funciones que se denominan funciones continuas en el punto a.

Aquellas funciones que son continuas en todos los puntos del dominio de definición, se denominan funciones continuas en dicho dominio; cuando están definidas sobre un intervalo, son aquellas cuya gráfica no presenta interrupciones, ni saltos, ni oscilaciones indefinidas, haciendo corresponder a puntos "próximos" valores también "próximos", es decir, se dibujan de un sólo trazo.

En este capítulo estudiamos las funciones continuas y algunas de sus propiedades más notables. La relación existente entre funciones y la existencia y valores de los límites hace que muchas de las propiedades de estas funciones se obtengan de manera inmediata.

Sección 4-1

Funciones continuas

La continuidad en un punto es una propiedad local de las funciones, es decir, tan sólo se necesita conocer el comportamiento de la función en un entorno del punto para el estudio de ella.

4-1.1 Definición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$ y $a \in A$. Se dice que la función f es continua en el punto a si para cada entorno de f(a), N(f(a)), existe un entorno de a, N(a), tal que $f(x) \in N(f(a))$ para todo $x \in N(a) \cap A$.

Si se tiene en cuenta la definición de entorno, la definición se expresa de la forma siguiente:

La función f es una función continua en el punto a si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe otro número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$.

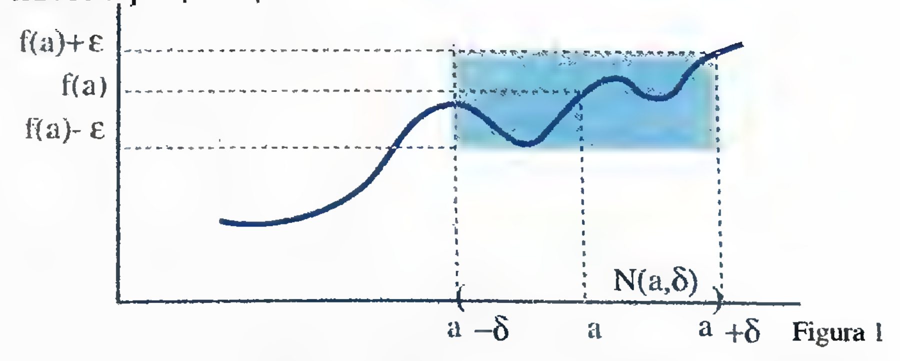


Figura 1

Al recordar la definición de límite, la definición se expresa de la forma:

La función f es una función continua en el punto a si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y éste coincide con f(a), es decir, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Observación: Si el conjunto A está constituido por puntos aislados se puede considerar que toda función definida en él es continua. Además, cabe destacar que si bien la definición posee un carácter general, usualmente se trata con puntos a de acumulación de A.

De la definición de función continua en un punto, resulta de forma inmediata que si $A \subset \mathbf{R}$ y una función $f:A \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en un punto $a \in A$, entonces la restricción $(f|_B):B \rightarrow \mathbf{R}$ de la función f a cualquier subconjunto B de A que contenga al punto a, es también continua en el punto a.

Ejemplo 1

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es continua en el cero ya que en el cero no está definida, no obstante si es continua en todo $r \in \mathbf{R}-\{0\}$ puesto que

$$\lim_{x \to r} \frac{1}{x} = \frac{1}{r}.$$

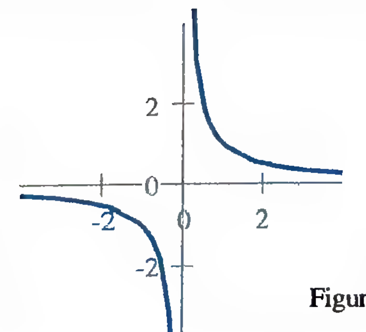


Figura 2

Ejemplo 2

Sea $f:(-1,1) \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Esta función no es continua en $x = 0$, ya que dado por ejemplo $\varepsilon = \frac{1}{4}$, existen $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tales que $-\delta < x_1 < 0 < x_2 < \delta$ cualesquiera que sea $\delta > 0$, y

$$|f(x_1) - f(0)| = |f(x_2) - f(0)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

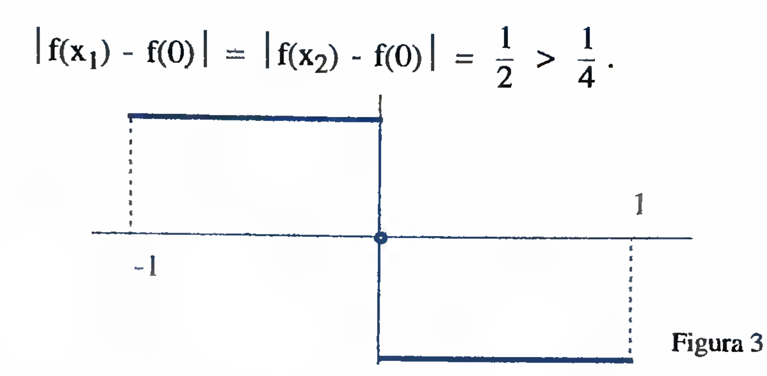


Figura 3

Por otra parte, en este caso se puede comprobar que la función no es continua en $x = 0$, de la siguiente forma:

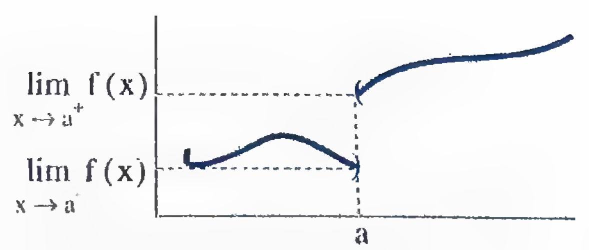
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{2} \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2},$$

por tanto, no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, luego, no es continua, como ya habíamos probado anteriormente por otro camino.

Obsérvese que la función anterior sí es continua en todo punto $b \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

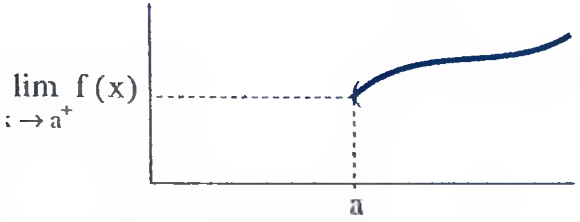
Ejemplo 3

Las funciones cuyas gráficas son las de las figuras siguientes, no son continuas en el punto a.



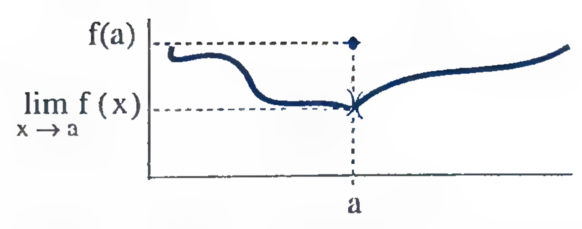
Los límites laterales en a no coinciden

Figura 4



La función no está definida en a

Figura 5



El límite de la función no coincide con el valor de la función en a

Figura 6

4-1.2 Definición

Sean $A \subset \mathbf{R}$ y $f:A \to \mathbf{R}$. Se dice que la función f es continua en el conjunto A si f es continua en todo punto de A.

De la definición resulta inmediatamente que si $B \subset A$ y f es continua en A entonces la restricción de la función f al conjunto B, $(f|_B):B \to \mathbf{R}$, es continua en B.

Ejemplo 4

La función del Ejemplo 2 no es continua en (-1,1) y sí lo es su restricción al conjunto $(-1,0) \cup (0,1)$.

4-1.3 Definición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f:A \to \mathbf{R}$ y $a \in A$. Se dice que la función f es continua por la izquierda en el punto a si la restricción de f al conjunto $A_i = A \cap (-\infty, a]$, es continua en el punto a.

Análogamente, se dice que la función f es continua por la derecha en el punto a si la restricción de f al conjunto $A_d = A \cap [a,+\infty)$, es continua en el punto a.

De esta definición resulta para $a \in A$, que:

- f es continua por la izquierda en el punto a si existe $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

- f es continua por la derecha en el punto a si existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Ejemplo 5

La función del Ejercicio 2 no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en el cero. Aunque existen los límites por la derecha y por la izquierda en cero, no coinciden con el valor de la función en el cero,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0) \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2} \neq 0 = f(0).$$

Ejemplo 6

La función f:**R**→**R** tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$,

es continua por la izquierda en el cero, pero no por la derecha, ya que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0) \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0).$$

Observación: Resulta trivial comprobar que una función f:A→**R**, con $A \subset$ **R**, es continua en un punto $a \in A$ si y sólo si f es continua por la

izquierda y por la derecha en a.

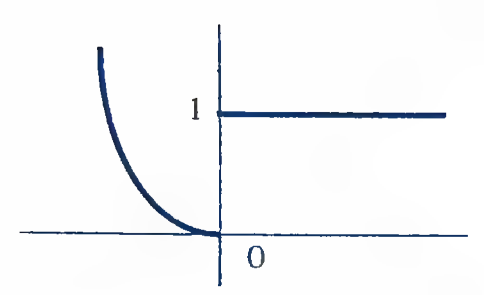


Figura 7

4-1.4 Proposición

Sean $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$ y $a \in A$. La función f es continua en el punto a si y sólo si para toda sucesión (x_n) de puntos de A tal que $\lim_n x_n = a$, se verifica que $\lim_n f(x_n) = f(a)$.

Esto se deduce de la Proposición 3-2.3 inmediatamente.

De la Proposición 3-3.4 se deduce fácilmente el siguiente resultado.

4-1.5 Proposición

Sean f y g dos funciones, de $A \subset \mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, continuas en un punto $a \in A$. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$ y $f.g$ son continuas en el punto a. Además, si $g(a) \neq 0$ entonces la función $\frac{f}{g}$ también es continua en el punto a.

4-1.6 Proposición

Sean $A, B \subset \mathbf{R}$, $a \in A$, $f: A \to \mathbf{R}$ y $g: B \to \mathbf{R}$. Si $f(A) \subset B$, es decir $f(x) \in B$ para todo $x \in A$, f es una función continua en el punto a y g es continua en el punto f(a), entonces la función compuesta $g \circ f: A \to \mathbf{R}$, definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$, es continua en el punto a.

Demostración

Por ser g continua en el punto f(a), para cada entorno $N(g \circ f(a)) = N(g(f(a)))$ existe un entorno $N(f(a))$ tal que $g(y) \in N(g(f(a)))$

para todo $y \in N(f(a)) \cap B$.

Por ser f continua en el punto a, para el entorno $N(f(a))$ existe un entorno $N(a)$ tal que $f(x) \in N(f(a))$ para todo $x \in N(a) \cap A$. Por tanto, para todo $x \in N(a) \cap A$ se tiene que $f(x) \in N(f(a)) \cap B$ y, por consiguiente, $g(f(x)) = g \circ f(x) \in N(g(f(a))) = N(g \circ f(a))$, de donde resulta que $g \circ f$ es continua en el punto a.

Observación: Dada una función $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, inyectiva (una función que verifica que para cualquier par de elementos $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$) se puede definir una función

$$f^{-1}: f(A) \to \mathbf{R},$$

denominada **función inversa** de la función f, de la forma siguiente:

$$\text{Para cada } y \in f(A),\ f^{-1}(y) = x \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = y.$$

Se comprueba fácilmente que $f^{-1} \circ f$ es la función identidad en A y que $f \circ f^{-1}$ es la función identidad en f(A).

4-1.7 Definición

Se dice que una función $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, es estrictamente creciente en el conjunto A (respectivamente, estrictamente decreciente) si $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_2) < f(x_1)$), para todo par de elementos $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 < x_2$.

Se prueba fácilmente que toda función estrictamente creciente o estrictamente decreciente es inyectiva y, por tanto, se puede definir su función inversa. Si además está definida en un intervalo y es continua, entonces su inversa también es continua, como se enuncia en la siguiente proposición cuya demostración queda como ejercicio del lector.

4-1.8 Proposición

Sea f una función estrictamente creciente (respectivamente, estrictamente decreciente) definida en un intervalo I. Si f es continua en I, entonces su función inversa f^{-1} es también estrictamente creciente (respectivamente, estrictamente decreciente) y continua en f(I).

Sección

4-2 Continuidad y compacidad

En esta sección se prueba que la imagen por una función continua de un conjunto compacto es un conjunto compacto, de donde resulta inmediatamente que la imagen de un subconjunto acotado de **R** por una aplicación continua definida en todo **R** es un conjunto acotado y que para cada función real continua definida en un compacto $K \subset \mathbf{R}$ existe al menos un punto de K donde la función alcanza su valor máximo y al menos otro donde alcanza su valor mínimo.

Con objeto de simplificar la demostración de la conservación de la compacidad por las funciones continuas, se prueba a continuación una caracterización de la continuidad global, en un conjunto, mediante conjuntos abiertos y cerrados.

4-2.1 Proposición

Una función $f: A \to \mathbf{R}$, con $A \subset \mathbf{R}$, es continua en A si, y sólo si para cada subconjunto abierto $U \subset \mathbf{R}$ existe un abierto $V \subset \mathbf{R}$ tal que

$$f^{-1}(U) = V \cap A.$$

Demostración

Recordamos que $f^{-1}(U) = \{x \in A: f(x) \in U\}$.

Sea $f: A \to \mathbf{R}$ una función continua y $U \subset \mathbf{R}$ un conjunto abierto. Si $f^{-1}(U) = \varnothing$ entonces $V = \varnothing$ verifica la condición. Así pues, supongamos que $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, entonces para cada $a \in f^{-1}(U)$ se tiene que $f(a) \in U$ y, al ser U un conjunto abierto existe un entorno $N(f(a))$ tal que $N(f(a)) \subset U$. Por ser f continua en A, también lo es en el punto $a \in A$ y, por tanto, existe un entorno $N(a)$ tal que $f(N(a) \cap A) \subset N(f(a))$.

Por consiguiente,

$$V = \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} N(a)$$

es abierto, por ser unión de abiertos, y verifica que $f^{-1}(U) = V \cap A$, ya que si $a \in f^{-1}(U)$ entonces $a \in A$ y $a \in N(a) \subset V$, y si $b \in V \cap A$ entonces

$b \in A$ y existe un $a \in f^{-1}(U)$ tal que $b \in N(a)$ y, por tanto, $f(b) \in N(f(a)) \subset U$ y $b \in f^{-1}(U)$.

Veamos el recíproco. Se debe probar que f es continua en cada punto $a \in A$. En efecto, sean $a \in A$ y un entorno $N(f(a))$. Como $N(f(a))$ es abierto existirá otro abierto $V \subset \mathbf{R}$ tal que $f^{-1}(N(f(a)) = V \cap A$. Como $f(a) \in N(f(a))$ resulta que $a \in f^{-1}(N(f(a))) = V \cap A$ y, por tanto, $a \in V$ y por ser V abierto, existe $N(a)$ tal que $N(a) \subset V$, de donde resulta que para todo $x \in A \cap N(a) \subset V \cap A = f^{-1}(N(f(a)))$ se tiene que $x \in f^{-1}(N(f(a)))$ y $f(x) \in N(f(a))$, como queríamos demostrar.

Observación: De la proposición anterior se deduce, al considerar los conjuntos complementarios, que:

La función $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, es continua en A si y sólo si para todo subconjunto cerrado $E \subset \mathbf{R}$ existe un conjunto cerrado $F \subset \mathbf{R}$ tal que

$$f^{-1}(E) = F \cap A.$$

4-2.2 Teorema

Si $K \subset \mathbf{R}$ es un conjunto compacto y $f: K \to \mathbf{R}$ es una función continua en K, entonces $f(K)$ es un conjunto compacto.

Demostración

Si $\mathbf{G}$ es un recubrimiento abierto de $f(K)$, es decir $f(K) \subset \bigcup_{G \in \mathbf{G}} G$, entonces como todo $G \in \mathbf{G}$ es abierto, por la Proposición 4-2.1, se verifica que para cada $G \in \mathbf{G}$ existe un abierto $G' \subset \mathbf{R}$ tal que

$$f^{-1}(G) = K \cap G'$$

y, la família $\mathbf{G}'$ formada por estos abiertos G' es un recubrimiento abierto de K, puesto que,

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{G \in \mathbf{G}} G\Big) = \bigcup_{G \in \mathbf{G}} f^{-1}(G) \subset \bigcup_{G \in \mathbf{G}} G'.$$

Por ser K un conjunto compacto existe un subrecubrimiento (de $\mathbf{G}$) finito de K, es decir, existe un número finito de abiertos $G_1', \ldots, G_n'$ de $\mathbf{G}$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G'_i$ y, por tanto,

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} (G'_i \cap K) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i).$$

En consecuencia $f(K) = f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$.

Luego, $\{G_1,...,G_n\}$ es un subrecubrimiento (de $\mathbf{G}$) finito de $f(K)$ y $f(K)$ es compacto.

Como consecuencia del teorema de conservación de la compacidad que se acaba de probar, se demuestra el teorema de Weierstrass que afirma que toda función real continua en un compacto $K\subset\mathbf{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en K.

4-2.3 Teorema de Weierstrass

Sean $K\subset\mathbf{R}$ un conjunto compacto y $f:K\to\mathbf{R}$ una función continua en K, entonces f tiene un máximo y un mínimo en K, es decir,

existen $x_1,x_2 \in K$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x\in K$.

Demostración

Como K es compacto, de la Proposición 4-2.2 resulta que f(K) es compacto y del Teorema 1-4.6 (de Heine-Borel) se sigue que f(K) es cerrado y acotado. Por tanto, existe un intervalo [a,b] tal que $f(K)\subset[a,b]$ y en consecuencia existen

$$b_1 = \inf\{f(x): x\in K\} \quad \text{y} \quad b_2 = \sup\{f(x): x\in K\}.$$

De las definiciones de ínfimo y de supremo se deduce que $b_1,b_2\in \text{adh}(f(K))$, y como f(K) es cerrado, entonces coincide con su adherencia. Así pues, $b_1,b_2\in f(K)$. Luego, existen $x_1,x_2\in K$ tales que $f(x_1) = b_1$ y $f(x_2) = b_2$ y, por consiguiente,

$$f(x_1) = b_1 \leq f(x) \leq b_2 = f(x_2) \text{ para todo } x\in K.$$

En el caso particular de que la función sea continua en un intervalo [a,b] se puede probar el teorema de los valores intermedios del que resulta inmediatamente el Teorema de Bolzano. Para ello se utiliza el siguiente resultado que enunciamos sin demostrar:

4-2.4 Proposición

Si $I \subset \mathbf{R}$ es un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ es una función continua en I, entonces el conjunto $f(I)$ (imagen de I por f) es también un intervalo.

4-2.5 Teorema de los Valores Intermedios

Si $I \subset \mathbf{R}$ es un intervalo, $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ es una función continua en I, $a, b \in I$ y c es un número real comprendido entre f(a) y f(b), entonces existe $x \in I$ comprendido entre a y b tal que $f(x) = c$.

Demostración

Si $a = b$ evidentemente $c = f(a)$. Sean $a, b \in I$ con $b > a$ y consideremos el intervalo $I_0 = [a,b]$, entonces la restricción de f al intervalo I_0 es continua en I_0.

De la Proposición 4-2.4 resulta que $f(I_0)$ es un intervalo que contiene a f(a) y a f(b) y, por tanto, $c \in f(I_0)$ por ser $f(I_0)$ un intervalo. Por tanto, existe $x \in I_0 \subset I$ tal que $f(x) = c$.

4-2.6 Teorema de Bolzano

Si $f: I \rightarrow R$ es una función continua en el intervalo $I = [a,b]$ tal que f(a) y f(b) tienen signos contrarios, entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración

Es una consecuencia inmediata del Teorema 4-2.5 (de los Valores Intermedios) ya que si f(a) y f(b) tienen signos contrarios entonces el cero está contenido en el intervalo de extremos f(a) y f(b).

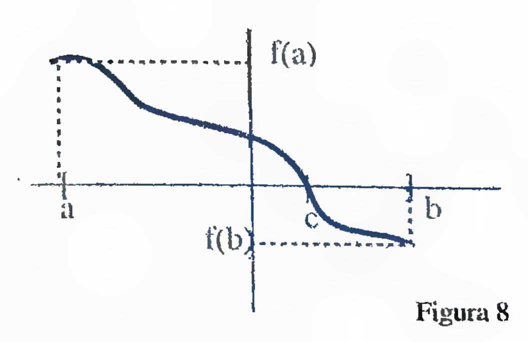


Figura 8

Sección

4-3 Continuidad Uniforme

Por definición, si $f:A\to\mathbf{R}$ es una función continua en $A\subset\mathbf{R}$, entonces f es continua en cada punto $a\in A$, es decir, dado $\varepsilon > 0$, para cada $a\in A$ existe un $\delta_a > 0$, que depende de a, tal que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ para todo } x\in A \text{ tal que } |x - a| < \delta_a.$$

En el caso notable de que para cada $\varepsilon > 0$ se pueda encontrar un $\delta > 0$, común para todos los elementos $a\in A$, tal que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \text{ para todo par de elementos } x,a\in A \text{ tales que } |x - a| < \delta,$$

la función no es sólo continua en A sino que además su continuidad es uniforme. En este caso, dados dos puntos cualesquiera de A que disten entre sí menos que δ, sus imágenes por f distarán entre sí menos que ε, lo que conduce de manera natural a la siguiente definición:

4-3.1 Definición

Se dice que una función $f:A\to\mathbf{R}$, $A\subset\mathbf{R}$, es uniformemente continua en A si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ para todo par de elementos } x,y\in A \text{ tales que } |x - y| < \delta.$$

Observación: De la definición resulta trivialmente que toda función $f:A\to\mathbf{R}$ uniformemente continua en A, es continua en A. El recíproco no es cierto en general, aunque sí se verifica en el caso de que el conjunto A sea compacto.

Ejemplo 7

La función $f:[\frac{1}{2}, 1]\to\mathbf{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x\in[\frac{1}{2}, 1]$, es uniformemente continua en $[\frac{1}{2}, 1]$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ se tiene que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $x,y\in[\frac{1}{2}, 1]$ verifican que $|x - y| < \delta$

entonces $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon$. Como para cada par de elementos $x,y \in [\frac{1}{2}, 1]$ se cumple que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{|x||y|} \leq \frac{|x-y|}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{|y-x|}{\frac{1}{4}} = 4|y-x|$,

dado $\varepsilon > 0$ basta con tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, ya que si $x,y \in [\frac{1}{2}, 1]$ verifican que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{4}$ entonces $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq 4|y-x| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

4-3.2 Proposición

Si $f: A \to \mathbf{R}$ es una función continua en $A \subset \mathbf{R}$ y A es compacto, entonces f es uniformemente continua en A.

Demostración

Por ser f continua en A lo es en cada punto $a \in A$. Por tanto, fijado un $\varepsilon > 0$, para cada $a \in A$ existe $\delta_a > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta_a$.

Evidentemente, la familia de entornos $\{ (a - \frac{\delta_a}{2}, a + \frac{\delta_a}{2}) : a \in A \}$ es un recubrimiento abierto de A y, por ser A compacto, existe un número finito de elementos $a_1, ..., a_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{\delta_{a_i}}{2}, a_i + \frac{\delta_{a_i}}{2} \right).$$

Se considera $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{a_1}, ..., \delta_{a_n}\}$, y veamos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $x,y \in A$ verifican que $|x - y| < \delta$. En efecto, en este caso, por ser $x \in A$, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in \left(a_i - \frac{\delta_{a_i}}{2}, a_i + \frac{\delta_{a_i}}{2} \right)$ y como

$$|a_i - y| = |a_i - x + x - y| \leq |a_i - x| + |x - y| < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \delta \leq \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i}$$

se tiene que $x,y \in (a_i - \delta_{a_i}, a_i + \delta_{a_i})$, y en consecuencia

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(a_i) + f(a_i) - f(y)| \leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(y)| <$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Luego, f es uniformemente continua en A.

Problemas Propuestos

1) Si una función f se define por la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+55x} + \sqrt{1+8x}}{x + \sqrt{x+1}}$$

determinar el mayor conjunto $A \subset \mathbf{R}$ en el que la función f es continua.

2) Sea f: $[0,2] \to \mathbf{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Estudiar la continuidad de esta función.

3) Demostrar que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 2x + 2 = 0$ tiene al menos una solución en **R**.

4) Si $A \subset \mathbf{R}$ y $f: A \to \mathbf{R}$ es una función continua en A tal que $f(a) \geq 0$ para todo $a \in A$, probar que la función $g: A \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ para todo $x \in A$, también es continua en A.

5) Estudiar la continuidad de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1\,] \\ x^2 + 1 + 2x & \text{si} \quad x \in (-1, 10\,] \\ \frac{121}{10}x & \text{si} \quad x \in (10, +\infty) \end{cases}$$

6) Probar que la ecuación $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$ tiene una solución entre 0 y 2.

7) Probar que existe una función continua y acotada $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que no alcanza el supremo y el ínfimo. ¿Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass sobre funciones continuas?.

8) Estudiar la continuidad de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \leq -2 \\[2ex] \dfrac{1}{x+2} & \text{si} \quad -2 < x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{x-1}{x^2-5x+4} & \text{si} \quad x > 1 \qquad x \neq 4 \\[2ex] 6 & \text{si} \quad x = 4 \end{cases}$$

9) Sean las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f y g, y la continuidad de $f \circ g$ y $g \circ f$.

10) Sea f:**R**→**R** una función tal que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \in$ **R**. Probar que f es uniformemente continua en todo **R**, y encontrar la forma que tienen todas las funciones de este tipo.

11) Sea f:[a,b]→**R** una función. Probar que son equivalentes:

a) f es continua en $x_0 \in [a,b]$.

b) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de [a,b] que converge a x_0, se tiene que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

12) Sea f la función definida en [0,1] por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 1-x & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

.Estudiar su continuidad.

13) Probar que dadas f,g:**R**→**R** funciones uniformemente continuas:

a) $f+g$ es uniformemente continua.

b) $-f$ es uniformemente continua.

c) $f \cdot g$ no tiene por qué ser uniformemente continua.



Funciones Derivables

Si f es una función real de variable real, la diferencia f(x) - f(a) mide la variación del valor de la función f al tomar la variable el valor a y el valor x,

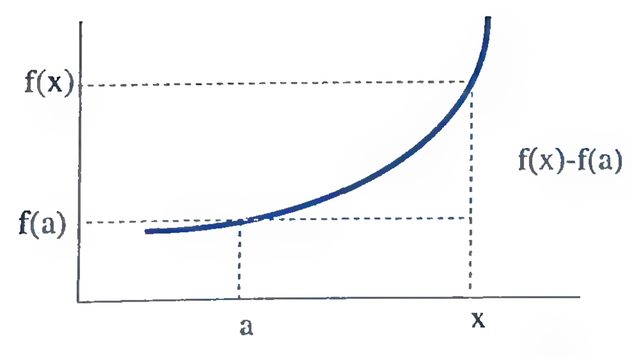


Figura 1

no obstante este valor no proporciona una información muy significativa de cómo varía la función alrededor del punto a, ya que depende mucho de la longitud del intervalo [a,x]. Así pues, parece natural considerar el valor promedio de esta variación, es decir,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ahora bien, la información sobre cómo varían los valores de la función cerca del punto a, es tanto más fidedigna cuanto menor es la longitud del intervalo [a,x], lo que llevado al "límite", nos conduce a considerar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

que bajo ciertas condiciones se denomina **derivada de la función f en el punto a.**

El anterior cociente, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (a,f(a)) y (x,f(x)).

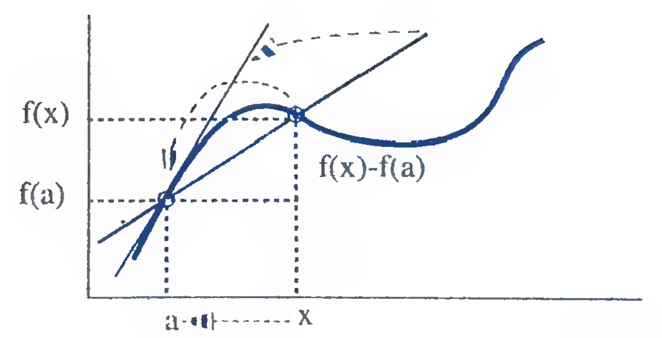


Figura 2

Además, a medida que el punto x se "acerca" al punto a, las rectas que unen los puntos (a,f(a)) y (x,f(x)) se acercan cada vez más a la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (a,f(a)).

Sección

5-1

Derivada de una función en un punto. Funciones Derivables

En este capítulo se trabaja con funciones cuyas gráficas poseen recta tangente en un punto arbitrario.

5-1.1 Definición

Sea A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ y $f:A\to\mathbf{R}$ una función. Se dice que la función f tiene derivada en un punto $a\in A$, si existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Suele decirse que la función f tiene "derivada infinita" en un punto $a\in A$, si f es continua en a y el anterior límite es infinito.

Si la función f tiene derivada en el punto $a\in A$, entonces se dice que f es **derivable** en a. Además, al límite anterior se le denomina derivada de f en a y se le denota por $f'(a)$ o $Df(a)$ indistintamente.

Al considerar en el límite anterior el cambio $x - a = h$, se obtiene que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

De la definición y propiedades de los límites de funciones, resulta inmediatamente que la función f tiene derivada en $a\in A$ si y sólo si los límites laterales

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

existen, son iguales y finitos. En caso de existir los límites laterales anteriores, se denominan respectivamente, **derivada por la izquierda** y **derivada por la derecha** de la función f en el punto a y se denotan indistintamente por $D^-f(a)$ y $D^+f(a)$ o por $f'(a-)$ y $f'(a+)$.

5-1.2 Definición

Una función $f:A\to\mathbf{R}$, definida en un subconjunto abierto A de $\mathbf{R}$, se

dice que es derivable en A cuando lo es en todos los puntos de A. Es decir,

" f es derivable en A si y sólo si existe f '(a) para todo $a \in A$".

Si A es un subconjunto abierto de **R** y $f:A \to \mathbf{R}$ es una función derivable en A, entonces la función $f':A \to \mathbf{R}$ tal que $f'(x)$ es la derivada de la función f en el punto x, para cada $x \in A$, se denomina **función derivada,** o a veces simplemente, derivada de la función f. También, suele denotarse Df.

Ejemplo 1

La función $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

no es derivable en $x = 0$ pues las derivadas laterales en $x = 0$ son distintas.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Ejemplo 2

Las funciones (identidad y constante) $f,g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = r$, para todo $x \in \mathbf{R}$, con r un número real determinado, son derivables en **R** y sus funciones derivadas son las funciones constantemente iguales a 1 y a 0 respectivamente, es decir $f'(a) = 1$ y $g'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbf{R}$.

En efecto, para cada número real $a \in \mathbf{R}$ se tiene que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 1 = 1 \quad \text{y}$$

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{r - r}{x - a} = 0.$$

Ejemplo 3

La función definida por $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

no es derivable en el cero, puesto que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 .$$

5-1.3 Proposición

Si A es un conjunto abierto de **R** y $f{:}A \to \mathbf{R}$ es una función derivable en el punto $a \in A$, entonces la función f es continua en el punto a.

Demostración

Si $x \in A$ y $x \neq a$, entonces

$$f(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \cdot (x - a) + f(a)$$

y como

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} (x - a) = 0 ,$$

resulta que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

y, por consiguiente, la función f es continua en el punto a.

Observación: De la proposición anterior resulta inmediatamente que si una función no es continua en un punto, entonces no puede ser derivable en dicho punto. Por otra parte, cabe destacar que el recíproco de la Proposición 5-1.3 no es cierto en general, siendo numerosas las funciones, como la del Ejemplo 1, que son continuas en un punto pero que no son derivables en dicho punto.

De acuerdo con la introducción de este capítulo acerca de que la recta

tangente a la gráfica de una función f en un punto (a,f(a)), es la "recta límite" de las rectas secantes que pasan por el punto (a,f(a)) y por otro punto arbitrario (x,f(x)) de la gráfica de la función f, se define la recta tangente a la gráfica de una función en un punto de la siguiente forma :

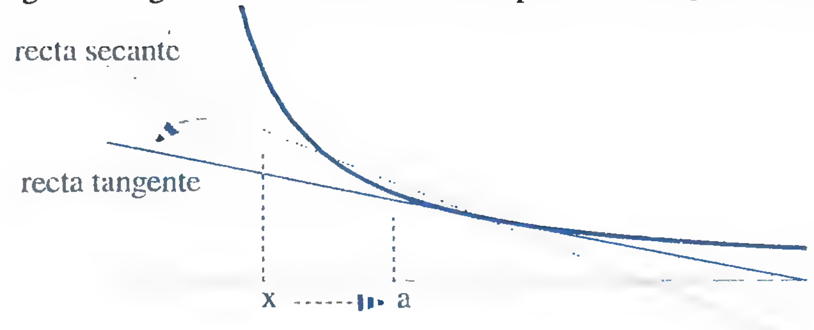


Figura 3

5-1.4 Definición

Sean $X \subset \mathbf{R}$ y $f: X \to \mathbf{R}$ una función derivable en un punto a perteneciente al interior del conjunto X. La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (a,f(a)) se define como la recta que pasa por dicho punto y tiene por pendiente f'(a).

La ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto (a,f(a)), es la recta de ecuación

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

En el caso de que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ sea infinito y f sea una función continua en el punto a, la ecuación de la recta tangente es x = a.

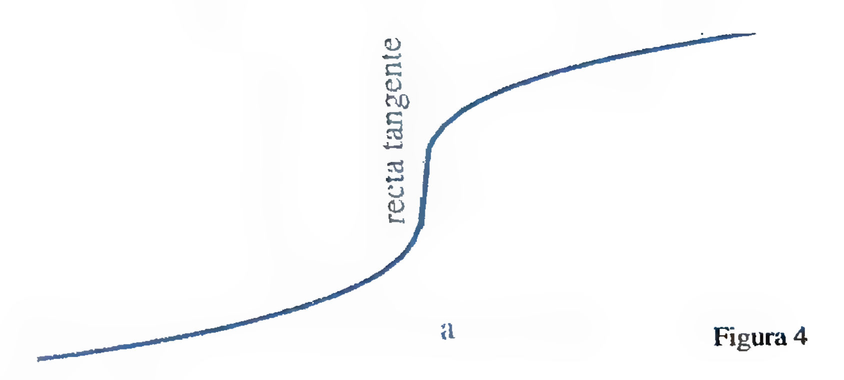


Figura 4

De la definición resulta que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a,f(a)) es una "aproximación" a la función f en el punto a, es decir, si se considera la función $\alpha:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si} \quad x \neq a \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases},$$

entonces $f(x) = [f(a)+f'(a)(x-a)] + \alpha(x)(x-a)$ y $\lim\limits_{x\rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

5-1.5 Proposición

Si A es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ y $f,g:A\rightarrow\mathbf{R}$ son dos funciones derivables en un punto $a\in A$, entonces las funciones f+g ,f-g y fg son también derivables en a y se verifican las igualdades

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad , \quad (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

y

$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)g'(a).$$

Además, si $g(a) \neq 0$ entonces la función $\frac{f}{g}$ definida en un entorno del punto a, es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demostración

Si $x\in A$ y $x\neq a$, entonces

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

y, por tanto,

$$\lim_{x\rightarrow a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} =$$

$$\lim_{x\rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\rightarrow a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a).$$

Análogamente se procede en los restantes casos. Veamos los correspondientes al producto y al cociente de funciones.

Supuesto que $x\in A-\{a\}$, se tiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)\,g(x) - f(a)\,g(x) + f(a)\,g(x) - f(a)\,g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x)\right) + \lim_{x \to a} \left(f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$

$$= f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$$

Nótese que se ha tenido en cuenta que por ser g derivable en a es continua en a, según se probó en la Proposición 5-1.3 y, por consiguiente, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Si $g(a) \neq 0$, por ser g continua en a, existe un entorno $N(a)$ de a tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in N(a)$ y, por tanto, para todo $x \in N(a)-\{a\}$ se tiene que

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\,g(a)} \frac{f(x)\,g(a) - f(a)\,g(x)}{x - a}$$

y

$$\lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x) \cdot g(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x)\,g(a) - f(a)\,g(x)}{x - a} =$$

$$= \frac{1}{g^2(a)} \lim_{x \to a} \frac{f(x)\,g(a) - f(a)\,g(a) + f(a)\,g(a) - f(a)\,g(x)}{x - a}$$

$$= \frac{1}{g^2(a)} \left[\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(a) - \lim_{x \to a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right] =$$

$$= \frac{1}{g^2(a)} [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)] = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Ejemplo 4

Las funciones potencias, $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ con $f_n(x) = x^n$ para todo $x\in\mathbf{R}$, son funciones derivables en $\mathbf{R}$, y $f_n'(x) = nx^{n-1}$, para cualquier $n\in\mathbf{N}$.

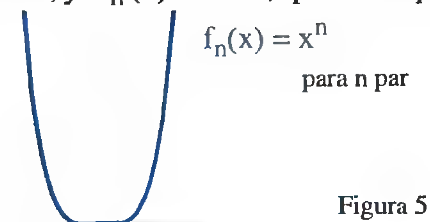


Figura 5

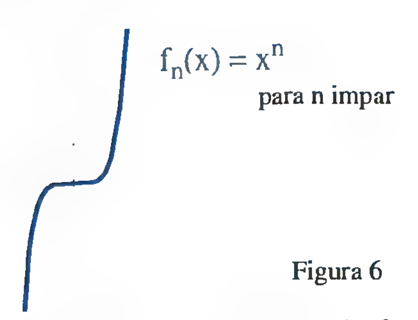


Figura 6

Para ver esto se procede por inducción. Para n = 1 el resultado se obtiene del Ejemplo 2. Supongamos que se verifica para un $n\in\mathbf{N}$ y veamos que también se verifica para n+1.

Si $f_n'(x) = nx^{n-1}$ entonces teniendo en cuenta que $f_{n+1}(x) = f_n(x)f_1(x)$, al aplicar la Proposición 5-1.5 resulta que

$$f'_{n+1}(x) = f'_n(x)f_1(x) + f_n(x)f'_1(x) = n x^{n-1}\cdot x + x^n\cdot 1$$
$$= n x^n + x^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}.$$

Ejemplo 5

Sea $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_1x + a_0$. De la Proposición 5-1.5 y

de los Ejemplos 1 y 2 resulta que

$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + ... + a_1 = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$.

Ejemplo 6

La derivada de la función $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, para todo $x\in(0,+\infty)$, siendo n un número natural, se calcula como si fuese un cociente de funciones.

Si $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ es la función constantemente igual a 1, se tiene que

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^n} \quad \text{y, por tanto,}$$

$$f'(x) = \frac{0.x^n - 1.nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{2n-n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

para todo $x\in(0,+\infty)$. Luego

si $f(x) = x^{-n}$ con $x\in(0,+\infty)$, entonces $f'(x) = -n\,x^{-(n+1)} = -n\,x^{-n-1}$.

5-1.6 Regla de la Cadena

Sean $A,B\subset\mathbf{R}$ dos conjuntos abiertos y $f:A\to\mathbf{R}$ y $g:B\to\mathbf{R}$ dos funciones tales que $f(A)\subset B$. Si f es derivable en un punto a y la función g tiene derivada en $f(a)$, entonces la función $g\circ f:A\to\mathbf{R}$ es derivable en $a\in A$, y $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a)$.

Demostración

Consideramos la función $h:B\to\mathbf{R}$, definida por

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{si} \quad y\neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si} \quad y = f(a) \end{cases}.$$

Esta función es continua en $f(a)$ ya que

$$\lim_{y\to f(a)} h(y) = \lim_{y\to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g'(f(a)) = h(f(a))$$

y, por tanto,

$$\lim_{x \to a} h(f(x)) = \lim_{x \to a} (h \circ f)(x) = (h \circ f)(a) =$$
$$= h(f(a)) = g'(f(a))$$

y

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$
$$= \lim_{x \to a} \left(h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) =$$
$$= \left[\lim_{x \to a} h(f(x))\right]\left[\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] = g'(f(a)) \cdot f'(a) .$$

5-1.7 Proposición

Si I es un intervalo y $f{:}I \to \mathbf{R}$ es una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente en I y derivable, con derivada no nula, en un punto a interior a dicho intervalo I, entonces su función inversa f^{-1} es derivable en el punto $b = f(a)$. Además

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = (f'(f^{-1}(b)))^{-1} .$$

Demostración

La Proposición 4-1.7 establece que la función f^{-1} es continua y estrictamente creciente o estrictamente decreciente en el intervalo $J = f(I)$ y, por consiguiente, $f^{-1}(y) \neq a$ para todo $y \in J\text{-}\{b\}$ y

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a .$$

Si $y \in J\text{-}\{b\}$ entonces

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right)^{-1}$$

y en el caso de ser $f'(a) \neq 0$, se tiene que

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(\lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right)^{-1} =$$

$$\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^{-1} = (f'(a))^{-1}.$$

Observación: Si f'(a) = 0, entonces $\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}$

Ejemplo 7

La función $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ para todo $x\in\mathbf{R}$ siendo n un número natural impar mayor que 1, es derivable en $\mathbf{R}$-{0}.

Se considera la función $g:(-\infty,0)\to\mathbf{R}$, definida por $g(x) = x^n$ para todo $x\in(-\infty,0)$. Esta función estrictamente creciente y derivable en todo $(-\infty,0)$ y su derivada $g'(x) = nx^{n-1}$ no se anula en $(-\infty,0)$. Al aplicar la Proposición 5-1.7 resulta que g^{-1} es derivable en todo $x\in(-\infty,0)$ y $g'(f(x))\neq 0$.

Como $f = g^{-1}$ en todo $x\in(-\infty,0)$, al aplicar la Proposición 5-1.7 resulta que f es derivable en todo $x\in(-\infty,0)$ y

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}},$$

$$f'(x) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}},$$

o, lo que es lo mismo,

$$f'(x) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{1-1/n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Un resultado análogo se obtiene para $(0,+\infty)$.

Sección

5-2 Máximos y mínimos locales

Si A es un subconjunto de **R** y $f:A\to\mathbf{R}$ es una función definida en A, se dice que un punto $a\in A$ es un punto de máximo de f sobre A si $f(x) \le f(a)$ para todo $x\in A$, diciéndose que f(a) es el valor máximo, o el máximo, de la función f en A. También, suele decirse que f tiene, o alcanza, un máximo en el punto a.

Análogamente, un punto $a\in A$ es un punto de mínimo de f sobre A si $f(a) \le f(x)$ para todo $x\in A$, diciéndose que f(a) es el valor mínimo, o el mínimo, de la función f en A.

El teorema de Weierstrass asegura que toda función $f:K\to\mathbf{R}$ continua en un compacto $K\subset\mathbf{R}$, tiene en K al menos un punto de máximo y un punto de mínimo. Veamos como la derivada permite detectar puntos máximos y mínimos de una función, de carácter local, para lo que comenzaremos por definir este concepto, que por otra parte resulta bastante intuitivo.

Este estudio se completará en el capítulo siguiente como aplicación del Teorema de Taylor.

5-2.1 Definición

Sean $A\subset\mathbf{R}$, $f:A\to\mathbf{R}$ y $a\in A$. Se dice que la función f tiene un máximo relativo o máximo local, en el punto a, si existe un entorno N(a) tal que $f(x) \le f(a)$ para todo $x\in A\cap N(a)$. En este caso se dice que el punto a es un punto de máximo relativo, o local, de la función f.

Se dice que la función f tiene un mínimo relativo o mínimo local, en el punto a, si existe un entorno N(a) tal que $f(a) \le f(x)$ para todo $x\in A\cap N(a)$. En este caso se dice que el punto a es un punto de mínimo relativo, o local, de la función f.

Ejemplo 8

La función $f:[1,6]\to\mathbf{R}$ cuya gráfica es la de la Figura 7 tiene un mínimo relativo en el punto 5 y un máximo relativo en el punto 3, ya que,

$$f(x) \geq 4 = f(5) \text{ para todo } x \in (5-1, 5+1) = (4,6),$$

$$f(x) \leq 2 = f(3) \text{ para todo } x \in (3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}).$$

Nótese que ni el punto 5 es un punto de mínimo de la función f, ya que f(1) = 0 < f(5) = 4, ni el punto 3 es un punto de máximo de f, puesto que f(3) = 2 < f(4) = 5.

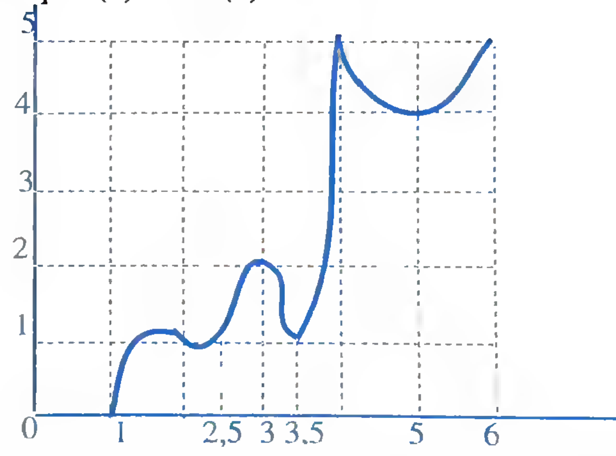


Figura 7

El valor de la derivada proporciona una condición necesaria , pero no siempre suficiente, para que un punto sea de máximo o de mínimo relativo de una función, como se ve a continuación.

5-2.2 Teorema

Sean $A \subset \mathbf{R}$ un conjunto abierto y $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ una función derivable en un punto $a \in A$. Si a es un punto de máximo relativo o de mínimo relativo de la función f, entonces $f'(a) = 0$.

Demostración

Supuesto que el punto a es un punto de mínimo relativo de la función f, existe un entorno $N(a,\varepsilon)$, que podemos suponer contenido en A por ser A un abierto, tal que $f(a+h) \geq f(a)$ para todo $0 < h < \varepsilon$ y, por tanto,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0, \text{ y } f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

Análogamente, si $-\varepsilon < h < 0$ también se tiene que $f(a+h) \geq f(a)$ y, por tanto,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0, \text{ y } \; f'(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0 \; .$$

Luego $0 \leq f'(a) \leq 0$ y, por tanto, $f'(a) = 0$.

Mediante un razonamiento similar, se prueba el resultado si a es un punto de máximo relativo de la función f.

Observación: Se debe tener muy en cuenta que pueden existir puntos donde la derivada de la función se anule y no sean puntos ni de máximo relativo ni de mínimo relativo.

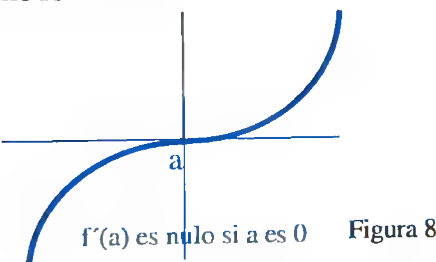


Figura 8

Ejemplo 9

Calculamos el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^2+x-1$ sobre el intervalo [-1,0].

Por el Teorema de Weierstrass, existen $x_1, x_2 \in [-1, 0]$ tales que $f(x_1)$ es valor máximo y $f(x_2)$ es valor mínimo, de f en el intervalo [-1, 0].

Por el Teorema 5-2.2, si $x_1, x_2 \in (-1, 0)$, entonces $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Como $f'(x) = 2x+1$ para todo $x \in (-1, 0)$, se tiene que $2x+1 = 0$ y, por tanto, $x = -\frac{1}{2}$.

Luego los posibles puntos en los que la función f alcanza sus valores máximos y mínimos son los puntos -1, 0 y $-\frac{1}{2}$. Veamos los valores de la función en estos puntos:

$$f(-1) = -1, \; f(0) = -1 \; \text{ y } f(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{5}{4}.$$

En consecuencia, el valor máximo de la función en [-1, 0] es -1 y el valor mínimo es $-\frac{5}{4}$.

Sección

5-3

Teoremas de Rolle, del Incremento finito y del Valor medio de Cauchy

5-3.1 Teorema de Rolle

Si $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, f es derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c\in(a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

Por ser el intervalo $[a, b]$ un conjunto compacto y ser la función f continua en $[a, b]$, del teorema de Weierstrass, resulta que f alcanza en $[a, b]$ un máximo M y un mínimo m.

Si $M = m$ entonces la función es constante en $[a, b]$, por tanto, como se vió en el Ejemplo 2, $f'(x) = 0$ para todo $x\in(a, b)$.

Si $M \neq m$, entonces al menos uno de los dos valores m y M, será distinto de $f(a) = f(b)$. Si $m \neq f(a)$, entonces existe al menos un $c\in(a, b)$ tal que $f(c) = m$. Además, c es un punto de mínimo relativo de la función $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ y, al aplicar el Teorema 5-2.2 resulta que $f'(c) = 0$.

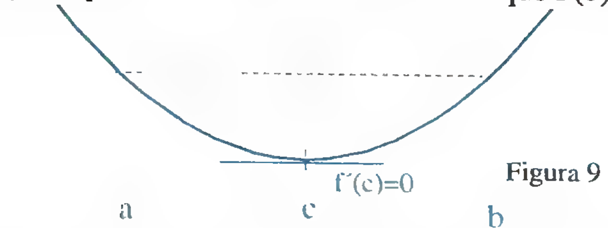


Figura 9

Análogamente, si $M \neq f(a)$, entonces existe $c\in(a, b)$ tal que $f(c) = M$ Además, c es un punto de máximo relativo de la función $f:(a, b)\to\mathbf{R}$, de donde resulta que $f'(c) = 0$.

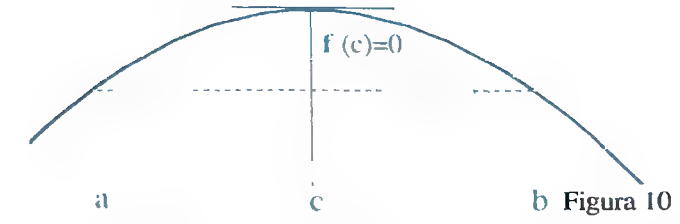


Figura 10

Como consecuencia del Teorema de Rolle se obtienen los teoremas del incremento finito y del valor medio de Cauchy.

5-3.2 Teorema del Incremento Finito

Si $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c\in(a, b)$ tal que

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demostración

Consideremos la función $g:[a, b]\to\mathbf{R}$ tal que

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

para todo $x\in[a, b]$. Esta función es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $g(a) = g(b) = 0$. Al aplicar el teorema de Rolle, resulta la existencia de al menos un punto $c\in(a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, y como,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ para todo } x\in(a, b),$$

se tiene que $0 = g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por tanto,

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a).$$

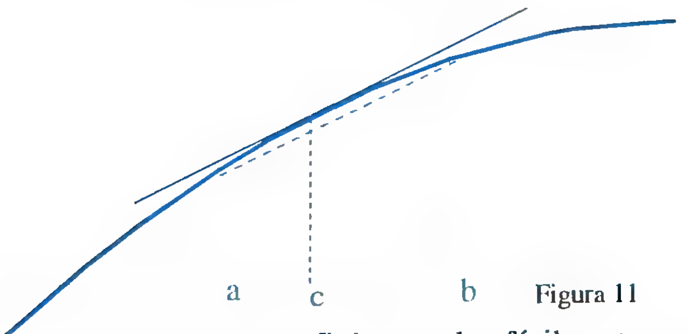


Figura 11

Del Teorema del incremento finito resulta fácilmente, como se ve a continuación, que si la derivada de una función es nula en todos los puntos de un intervalo, entonces la función es constante en dicho intervalo, así como que la función es creciente (respectivamente decreciente) en el intervalo si la derivada de la función es positiva (respectivamente negativa) en todos los puntos del intervalo.

5-3.3 Corolario

Sea $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) = 0$ para todo $x\in(a, b)$, entonces la función f es constante en $[a, b]$.

Demostración

Si $x,y \in [a, b]$ y $x < y$, el Teorema del incremento finito asegura que existe un punto $c \in (x, y) \subset (a, b)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x),$$

de donde por ser $f'(c) = 0$ se deduce que $f(x) = f(y)$.

5-3.4 Corolario

Si $f:[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) \geq 0$ (respectivamente $f'(x) \leq 0$) para todo $x \in (a,b)$, entonces la función f es creciente (respectivamente decreciente) en el intervalo $[a, b]$.

Demostración

Si $x,y \in [a, b]$ y $x < y$, entonces el teorema del incremento finito asegura la existencia de al menos un punto $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x),$$

de donde por ser $y-x \geq 0$ y $f'(c) \geq 0$ (respectivamente $f'(c) \leq 0$), resulta que $f(y) \geq f(x)$ (respectivamente $f(y) \leq f(x)$).

Observación: Nótese que si $f'(x) > 0$ (respectivamente, $f'(x) < 0$) para todo $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente creciente (respectivamente estrictamente decreciente) en $[a, b]$.

5-3.5 Teorema del Valor Medio de Cauchy

Sean $f,g:[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Demostración

Consideremos la función $F:[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$F(x) = f(x)\,[g(b) - g(a)] - g(x)\,[f(b) - f(a)]$$

para todo $x \in [a, b]$. Esta función es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $F(a) = f(a)g(b)-f(b)g(a) = F(b)$. Al aplicar el Teorema de Rolle se obtiene la existencia de al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$. Como $F'(x) = f'(x)[g(b)-g(a)]-g'(x)[f(b)-f(a)]$ para todo $x \in (a, b)$, se tiene que

$$0 = F'(c) = f'(c)\,[g(b) - g(a)] - g'(c)\,[f(b) - f(a)]$$

y, por tanto, $f'(c)\,[g(b) - g(a)] = g'(c)\,[f(b) - f(a)]$.

Sección

5-4 Regla de l'Hôpital

El teorema del valor medio de Cauchy permite probar la regla de l'Hôpital, que es una gran herramienta en el cálculo de límites que al hacer uso de las propiedades de los límites presentan indeterminación. Unicamente se enuncia, esbozándose la idea básica de su demostración.

Si f y g son dos funciones continuas en un intervalo [a, b], derivables en (a, b) y tales que f(a) = g(a) = 0 y $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces para cada $x \in (a, b)$ existirá, por el teorema del valor medio de Cauchy, al menos un $y_x \in (a, x)$ tal que

$$[f(x) - f(a)]\, g'(y_x) = [g(x) - g(a)]\, f'(y_x) \,,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} \,,$$

de donde, al tener en cuenta que el punto $y_x \in (a, x)$, se aproxima al punto a al hacerlo x, resulta que si existe $\lim\limits_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

5-4.1 Proposición

Sean $f,g:(a, b) \to \mathbf{R}$ dos funciones derivables con derivada finita en el intervalo (a, b) tales que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$$

y existe el límite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$. Entonces, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

Demostración

Sean $F,G:[a, \frac{b+a}{2}] \to \mathbf{R}$ las funciones definidas por F(x) = f(x) y

$G(x) = g(x)$ para todo $x \in (a, \frac{b+a}{2}]$ y $F(a) = G(a) = 0$.

Las funciones F y G coinciden en $(a, \frac{b+a}{2})$ con f y g y, por tanto, son derivables en $(a, \frac{b+a}{2})$. Además, son continuas en $[a, \frac{b+a}{2}]$, ya que lo son en $\frac{b+a}{2}$ por ser derivables en ese punto y en a por definición, ya que $\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$

y

$$\lim_{x \to a} G(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 = G(a) .$$

Por otra parte, si $x \in (a, \frac{b+a}{2})$ entonces $G(x) = g(x) \neq 0$ puesto que si $g(x) = 0$, el teorema de Rolle asegura la existencia de al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, lo que es una contradicción. Por consiguiente, para cada $x \in (a, \frac{b+a}{2})$ existe, según el teorema del valor medio de Cauchy, un punto $y_x \in (a, x)$ de forma que

$$[F(x) - F(a)]\, G'(y_x) = [G(x) - G(a)]\, F'(y_x) ,$$

o lo que es lo mismo,

$$f(x)\, g'(y_x) = g(x)\, f'(y_x) \quad \text{ó} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} .$$

De donde resulta que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = k.$$

5-4.2 Regla de L'Hôpital

Sean $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f,g:(a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en (a, b) tales que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ y existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k .$$

Entonces, si $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$ ó si $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, se tiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k .$$

Un enunciado similar al anterior se puede dar si x tiende hacia b o cuando el límite de g al tender x hacia a, es $-\infty$.

Observación: Nótese que si no existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, no se puede asegurar nada a priori acerca de la existencia o no del límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, que puede existir o no.

Ejemplo 10

Sean $f,g:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} .$$

Calculamos $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 1}$ aplicando la regla de L'Hôpital a las funciones $F,G:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definidas por $F(x) = f(x)-1$ y $G(x)=g(x)-1$ para todo $x > 1$. Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{3} \frac{\sqrt[5]{(1+\frac{1}{x})^4}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}} = \frac{5}{3}.$$

Ejemplo 11

Se calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}$ aplicando la regla de L'Hôpital a las funciones $f,g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definidas por

$$f(x)=e^{x}-e^{-x}-2x \quad \text{y} \quad g(x)=x-\operatorname{sen}x \quad \text{para todo } x>0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}.$$

Al aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital a las funciones $u,v:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definidas por

$$u(x)=e^{x}+e^{-x}-2 \quad \text{y} \quad v(x)=1-\cos x \quad \text{para todo } x>0,$$

se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{sen}x},$$

y volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital a las funciones $h,k:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definidas por

$$h(x)=e^{x}-e^{-x} \quad \text{y} \quad k(x)=\operatorname{sen}x \quad \text{para todo } x>0,$$

resulta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{sen}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{h'(x)}{k'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Sección 5-5

Tabla de derivadas

$f(x) = c \cdot g(x)$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)\,h(x) - h'(x)\,g(x)}{h^2(x)}$
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = Lnx$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{Lna} \cdot \dfrac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot Lna$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \operatorname{tg} x$
$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

$f(x) = \text{arc sen } x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \text{arc cos } x \qquad f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \text{arc tg } x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad \text{arctg } f(x) = \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

$f(x) = \text{arc cotg } x \qquad f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$f(x) = \text{arc sec } x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$f(x) = \text{arc cosec } x \qquad f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$f(x) = \text{sh } x \qquad f'(x) = \text{ch } x$

$f(x) = \text{ch } x \qquad f'(x) = \text{sh } x$

$f(x) = \text{th } x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$

$f(x) = \text{arg sh } x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x) = \text{arg ch } x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(x) = \text{arg th } x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Problemas Propuestos

1) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$, con $x > 0$.

b) $g(x) = \sqrt{Lnx}$, con $x > 1$.

c) $h(x) = e^{x^2 + sen(x^3 + 1)}$.

d) $k(x) = arctg(senx)$.

2) Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f:[-1, \frac{1}{2}] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \text{ con } x \in [-1, \frac{1}{2}].$$

3) Calcular los límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{tgx - senx}{x - senx}$,

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x + senx}$.

4) Hallar la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ en $(0, 1)$.

b) $g(x) = \frac{1}{2x^2}$ $(x \neq 0)$ en $(1, \frac{1}{2})$.

5) Sea $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable en 0 tal que $g(0) = g'(0) = 0$. Hallar $f'(0)$ siendo f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,sen(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

6) Si para f,g:**R**→**R** se tiene la siguiente tabla de valores:

x	f(x)	f´(x)	g(x)	g´(x)
0	1	−1	2	4
1	3	2	0	0
2	0	5	3	−1
3	2	−3	1	0

Constrúyase la tabla análoga para las funciones $h = g \circ f$ y $k = f \circ g$.

7) Estudiar la derivabilidad de la función valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

8) Calcular la derivada, donde exista, de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -\sqrt{|x|} & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

9) Calcular $f''(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{(x-1)(x-2)}$$

definida en **R**-{1,2}.

10) Probar que $y = -x$ es tangente a la gráfica $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar el punto de tangencia y estudiar si esta tangente corta a la gráfica en algún punto distinto del punto de tangencia.

11) Hallar la derivada por la derecha en el punto $x = 0$ de las funciones

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad y \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0.$$

12) Un móvil en trayectoria rectilínea sigue la siguiente ley:

$$e(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 5,$$

donde e(t) se mide en kilómetros y t en segundos. Calcúlese la función velocidad v(t) y la función aceleración. Calcúlese la velocidad y aceleración en t = 0 y t = 2.

13) Decir cúal de los siguientes cálculos es erróneo y dar la equivocación cometida.

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{1}{8}$$

b) Al aplicar la regla de L´Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{3x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2}{6x} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

14) Hallar el radio de la base de un recipiente cónico de generatriz 2 cm. para que su capacidad sea máxima.

15) Comprobar que la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los segmentos $-1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq 1$. Hallar los valores correspondientes de c en los que se cumple dicho teorema.

16) Sea f una función continua en [0, 1] y derivable en (0, 1) tal que f(a), $f'(a) \in (0, 1)$ para todo $a \in [0, 1]$. Probar que existe un único $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = x_0$.

17) Hallar los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$,

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x\,(\mathrm{Ln}x)^n$,

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x}$,

d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2}$,

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}7x}{(x - x^2)^2}$,

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}$.

18) Hallar las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = 4^{\operatorname{sen}^2(2x)} \cdot \operatorname{Ln}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$.

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-(x^2+1)^3}{\operatorname{tg}x}}$.

19) Construya una tabla de derivadas análoga a la de la Sección 5.5 utilizando la composición de funciones. Por ejemplo, en lugar de escribir

$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

escriba,

$f(x) = \operatorname{arc\,sen} g(x) \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (g(x))^2}} \cdot g'(x)$,

o lo que es lo mismo,

$f(x) = \operatorname{arc\,sen} g(x) \qquad f'(x) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{1 - (g(x))^2}}$,

donde g es una función derivable.

Capítulo 6

Fórmula de Taylor y aplicaciones

La aproximación de funciones constituye uno de los temas fundamentales del Análisis Matemático, en ella, se trata de sustituir una función por otra de manejo más sencillo o de propiedades mejor conocidas, deduciéndose de estas últimas, propiedades "aproximadas" correspondientes a la función de partida. En todo problema de aproximación hay dos factores básicos a tener en cuenta, la clase de funciones que se utiliza para efectuar la aproximación y el método de medición del error cometido al efectuarla.

En el Capítulo 5, se ha señalado como en el caso de funciones derivables, la recta g tangente a la gráfica de una función f en un punto de abscisa $x = a$, constituye una aproximación local de la función f. Se puede usar la función g, en lugar de la función f, en puntos próximos al punto a, cometiéndose el error siguiente:

$$|f(x) - g(x)| = |\alpha(x)(x-a)| \quad \text{con} \quad \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Como la función f se aproxima en puntos x muy próximos al punto a, si el error cometido en vez de expresarse en función de $(x-a)$ se expresara en función de $(x-a)^n$, este error disminuiría considerablemente al aumentar n. Esto se consigue a partir de la derivación sucesiva, mediante la aproximación por funciones polinómicas que proporciona la fórmula de Taylor.

La fórmula de Taylor permite sistematizar el estudio local de las funciones con derivada hasta un cierto orden, dando información del comportamiento de la función en un entorno de un punto, referente a las propiedades de concavidad, convexidad e inflexión y constituyendo una herramienta de enorme utilidad en la determinación de los extremos relativos de la función.

Sección

6-1 Derivadas sucesivas

Si A es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ y la función $f:A \to \mathbf{R}$ es derivable en A, se definió la función derivada de la función f como la función $f':A \to \mathbf{R}$ tal que a cada $x \in A$ le hace corresponder $f'(x)$.

Si esta función f' tiene a su vez derivada en todo punto $x \in A$, se puede definir la función derivada segunda como la función $f'':A \to \mathbf{R}$ que a cada punto $x \in A$ le hace corresponder $f''(x) = (f')'(x)$, la derivada de la función f' en el punto x. Esta función se designa también indistintamente por $f^{(2)}$ o por $D^2 f$.

Análogamente, por recurrencia se puede definir la derivada n-ésima de la función f.

6-1.1 Definición

Si A es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ y $f:A \to \mathbf{R}$ es tal que existe la función derivada de orden $n-1$, $f^{(n-1)}:A \to \mathbf{R}$, y esta última función derivada tiene derivada en A, entonces se define la derivada n-ésima de la función f en A como la función $f^{(n)} : A \to \mathbf{R}$ (que también denotaremos por $D^n f$) tal que a cada $x \in A$ le hace corresponder la derivada de la función $f^{(n-1)}$ en el punto x, es decir,

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \quad \text{para todo } x \in A.$$

En algunas ocasiones y con objeto de unificar la notación se escribe $f^{(0)}$ para designar a la función f, es decir, $f^{(0)} = f$.

Ejemplo 1

Calculamos la derivada n-ésima de la función $f(x) = (x - a)^m$, siendo m un número natural y $a \in \mathbf{R}$, ambos prefijados. Para cada $x \in \mathbf{R}$ se tiene que

$$f'(x) = m\,(x - a)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(x-a)^{m-2}$$
$$f^{(3)}(x) = m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}$$
....

y, por inducción resulta que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}(x-a)^{m-n} & n < m \\ m! & n = m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

Ejemplo 2

Calculamos la derivada n-ésima de la función $f(x) = e^x$.

$$f'(x) = e^x.$$
$$f^{(2)}(x) = (f')'(x) = (e^x)' = e^x.$$
$$f^{(3)}(x) = (f^{(2)})'(x) = (e^x)' = e^x.$$
....
$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Ejemplo 3

Sean A un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$, $f, g : A \to \mathbf{R}$ dos funciones con derivada n-ésima en A y $F = f \cdot g$. La derivada n-ésima de F es:

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x).$$

Esto se comprueba por inducción. Si $n = 1$ entonces

$$F'(x) = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x) = f^{(0)}(x)\,g'(x) + f'(x)\,g^{(0)}(x) =$$
$$= \binom{1}{0} f^{(0)}(x)\; g^{(1-0)}(x) + \binom{1}{1} f^{(1)}(x)\; g^{(1-1)}(x),$$

verificándose por consiguiente, la igualdad. Supongamos que el

resultado se verifica para n-1 y comprobemos que se verifica para n.

$$F^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-1-k)}(x)$$

y

$$F^{(n)}(x) = (F^{(n-1)})'(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) + f^{(k+1)}(x)\, g^{(n-1-k)}(x)] =$$

$$= \binom{n-1}{0} f^{(0)}(x)\, g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) +$$

$$+ \binom{n-1}{n-1} f^{(n)}(x)\, g^{(0)}(x) = \binom{n}{0} f^{(0)}(x)\, g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) +$$

$$+ \binom{n}{n} f^{(n)}(x)\, g^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) \quad \text{para todo } x \in A,$$

ya que

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}, \quad \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \quad \text{y} \quad \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}.$$

Observación: Por inducción, como en el Ejemplo 3, se prueba que si las funciones $f, g, h : A \to \mathbf{R}$ tienen derivada n-ésima en el abierto A entonces la función $F = f \cdot g \cdot h$ también la tiene y

$$F^{(n)}(x) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} f^{(\alpha)}(x)\, g^{(\beta)}(x)\, h^{(\gamma)}(x)$$

siendo α, β, γ números naturales.

Sección

6-2

Fórmula de Taylor

Si A es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}$ y $f:A\rightarrow\mathbf{R}$ es una función con derivada n-ésima en un punto $a\in A$, entonces el polinomio:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que tiene grado menor o igual que n, puesto que $f^{(k)}(a)$ puede ser cero para $k \leq n$, verifica las $n+1$ condiciones siguientes:

$$P_n(a) = f(a)\,,\ P_n'(a) = f'(a)\,,\ P_n''(a) = f''(a)\,, ...,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Además, P_n es el único polinomio de grado menor o igual que n, que verifica las $n+1$ condiciones anteriores, ya que si

$$G(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n$$

es otro polinomio de grado menor o igual que n, que satisface dichas condiciones, entonces

$$G'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + ... + n\,a_n(x-a)^{n-1}$$

$$G''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + ... + n\,(n-1)\,a_n(x-a)^{n-2}$$

....

$$G^{(n)}(x) = n\,(n-1) .... 1.\, a_n = n!\, a_n$$

y

$$f(a) = G(a) = a_0\,,$$

$$f'(a) = G'(a) = a_1\,,$$

$$f''(a) = G''(a) = 2!\, a_2\,,$$

....

$$f^{(n)}(a) = G^{(n)}(a) = n!\, a_n\,.$$

Por tanto,

$$a_0 = f(a) = P_n(a),\ a_1 = \frac{f'(a)}{1!} = \frac{P'_n(a)}{1!}, \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{P^{(n)}{}_n(a)}{n!}$$

y el polinomio G coincide con el P_n, ya que sus coeficientes son los mismos.

Observación: Nótese que en la construcción del polinomio P_n sólo intervienen las derivadas sucesivas de la función f en el punto a, bastando por lo tanto saber que las funciones f, f', f'' ... $f^{(n)}$ existen en un entorno de dicho punto, por lo que a veces no explicitaremos el abierto A en el que dichas funciones están definidas. Por otra parte, la existencia y unicidad del polinomio P_n permite dar la siguiente definición:

6-2.1 Definición

Sea f una función con derivada n-ésima en un punto a, se denomina polinomio de Taylor de grado menor o igual que n de f en a, al único polinomio P_n de grado menor o igual que n que verifica las n+1 condiciones siguientes:

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a), \ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

El polinomio de Taylor de grado menor o igual que n de la función f en el punto a se expresa de la siguiente forma:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

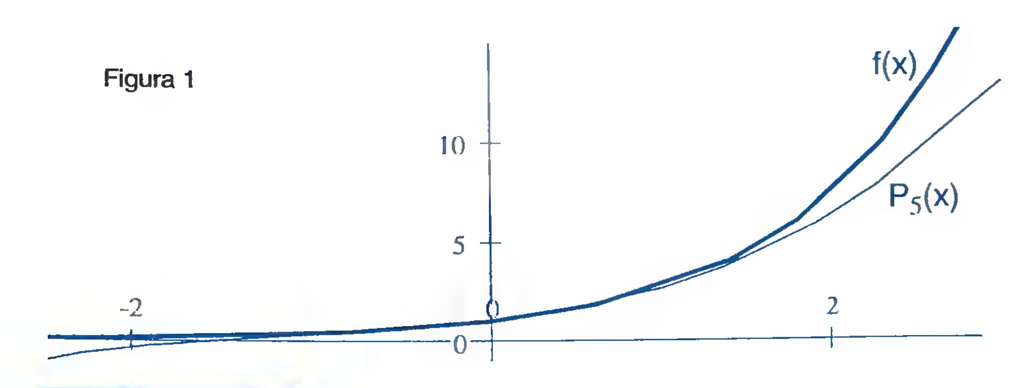
La función $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, definida en el dominio de definición de la función f, se denomina función **resto de Taylor** de orden n de la función f en el punto a.

Ejemplo 4

Se calcula el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 5 de la función $f(x) = e^x$ en el punto 0 de la siguiente forma.

Como $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(5)}(x) = e^x$ y $e^0 = 1$, entonces

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5.$$



Ejemplo 5

Determinamos el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3 de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = \frac{\pi}{2}$. Como

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x,$$

resulta que

$$f(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad f''(\frac{\pi}{2}) = -1, \quad f^{(3)}(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Por consiguiente, $P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$.

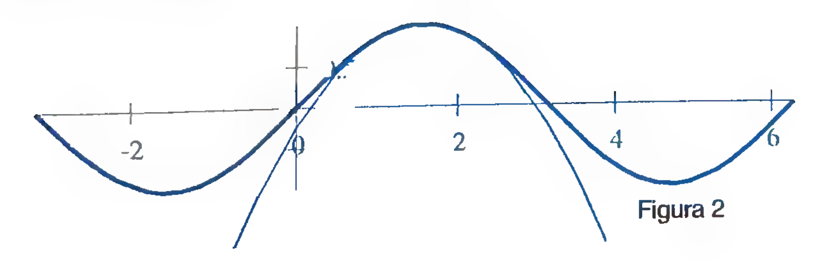


Figura 2

6-2.2 Fórmula de Taylor.

Si f es una función con derivada n-ésima en un punto a, entonces existe un entorno del punto a tal que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x)$$

para todos los elementos x pertenecientes a dicho entorno. Además,

$$\lim_{x \to a} \frac{E_n(x)}{(x-a)^n} = 0 .$$

Demostración

Como por definición $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, basta probar que

$$\lim_{x \to a} \frac{E_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Sea $G_n(x) = (x-a)^n$, entonces

$$\lim_{x \to a} E_n^{(i)}(x) = \lim_{x \to a} (f^{(i)}(x) - P_n^{(i)}(x)) = f^{(i)}(a) - P_n^{(i)}(a) = 0$$

y

$$\lim_{x \to a} G_n^{(i)}(x) = \lim_{x \to a} (n(n-1) \ldots (n-i+1)(x-a)^{n-i}) = 0,$$

para $0 \leq i \leq n\text{-}2$. Al aplicar la regla de l'Hôpital n-1 veces se obtiene que

$$\lim_{x \to a} \frac{E_n}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{E_n^{(1)}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(1)}(x) - P_n^{(1)}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{E_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} .$$

Como $f^{(n-1)}(a) = P_n^{(n-1)}(a)$, resulta que $\lim_{x \to a} \frac{E_n}{(x-a)^n} =$

$$= \frac{1}{n!} \left(\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - P_n^{(n-1)}(x) + P_n^{(n-1)}(a)}{x-a} \right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \lim_{x \to a} \frac{P_n^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(a)}{x-a} \right)$$

$$= \frac{1}{n!} (f^{(n)}(a) - P_n^{(n)}(a)) = \frac{1}{n!} \cdot 0 = 0.$$

6-2.3 Teorema de Taylor

Si f es una función con derivada n-ésima continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces, para cada $x\in(a, b)$ se verifica que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x),$$

donde el resto $E_n(x)$ puede escribirse de las siguientes maneras:

- $$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p \quad \text{con } p\in\mathbf{N} \text{ y } c\in(a,x).$$

  (Resto de Schlömilch).

- $$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a) \quad \text{con } c\in(a,x).$$

  (Resto de Cauchy).

- $$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{con } c\in(a,x).$$

  (Resto de Lagrange).

Demostración

Para cada $x\in(a, b)$ consideremos las funciones $F,G:[a, x]\to\mathbf{R}$ tales que

$$F(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

para todo $t\in[a, x]$ y G es una función arbitraria continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x).

Como la función F es continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x), del Teorema del valor medio de Cauchy se deduce la existencia de un punto $c\in(a, x)$ tal que

$$[F(x) - F(a)]\,G'(c) = F'(c)\,[G(x) - G(a)],$$

de donde al tener en cuenta que $E_n(x) = F(x) - F(a)$ y que

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad \text{para todo } t\in(a, x),$$

resulta si $G'(c) \neq 0$ que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \cdot \frac{G(x)-G(a)}{G'(c)}\ .$$

En el caso particular de ser $G(t) = (x - t)^p$ con $p \in \mathbf{N}$, la igualdad anterior se transforma en

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \frac{(x-a)^p}{p\,(x-c)^{p-1}} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n-p+1}(x-a)^p \quad \text{(resto de Schlömilch).}$$

Al hacer $p = 1$ en la fórmula anterior se tiene que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a) \quad \text{(resto de Cauchy).}$$

Al hacer $p = n+1$ en la fórmula del resto de Schlömilch se obtiene que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{(resto de Lagrange).}$$

Observación: La fórmula del resto de Lagrange nos permite acotar el resto de Taylor de una función en un punto y de esta forma conocer el error cometido al utilizar el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de la función f en un punto a, en lugar de la función f.

6-2.4 Corolario

Sea f una función con derivada n-ésima continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si existe $M > 0$ tal que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para todo $t \in (a, b)$, entonces

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}$$

para todo $x \in (a, b)$.

Demostración

Es una consecuencia inmediata de la fórmula del resto de Lagrange establecida en el Teorema 6-2.3 de Taylor.

Ejemplo 6

Se considera la función $f:[1,\infty)\to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \text{Ln}\, x$ (función logaritmo neperiano restringida a $[1,\infty)$). Calculamos Ln2 con un error menor que $\frac{1}{5}$.

Al aplicar el Teorema de Taylor resulta que

$$\text{Ln}2 = f(2) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(2-1) + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(2-1)^n + E_n(2) =$$

$$= f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} + E_n(2),$$

donde $E_n(2)$ tiene la expresión

$$E_n(2) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(2-1)^{n+1} \quad \text{con } c\in(1,2).$$

Como $f(1) = \text{Ln}1 = 0$ y

$f'(x) = x^{-1}$, $\qquad f''(x) = -x^{-2}$,

$f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $\qquad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$,

...

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\; x^{-n}$,

se tiene que

$$\text{Ln}2 = f(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + E_n(2)$$

y, además,

$$|E(2)| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)c^{n+1}}\right| \le \frac{1}{n+1},$$

ya que $c\in(1,2)$ (y, por tanto, $c > 1$).

Luego, basta tomar $\text{Ln}2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cong 0.78$,

ya que en este caso el error cometido es $|E_5(2)| \le \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

Sección 6-3

Concavidad y convexidad locales. Puntos de inflexión

En esta sección se estudian otras propiedades locales notables de la funciones, como son la concavidad y convexidad.

6-3.1 Definición

Se dice que una función $f:I\to\mathbf{R}$ es convexa en el intervalo abierto I si para cualesquiera que sean los puntos $a,x,b\in I$ que verifiquen $a<x<b$, se tiene que

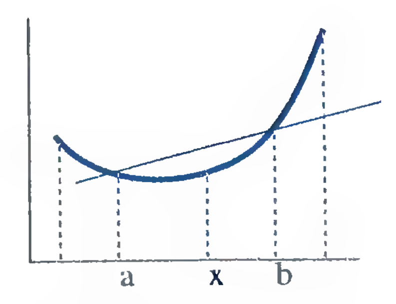
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} . \qquad (6\text{-}3.1.1)$$

De la definición resulta que la función f es convexa en I si para cualesquiera que sean $a,x,b\in I$ con $a<x<b$, se tiene que el punto $(x,f(x))$ de la gráfica de la función f, está situado por debajo de la recta secante que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$, ya que la ecuación de la secante es

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

y de (6-3.1.1) resulta que

$$f(x) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) = y .$$



Función convexa Figura 3

Además, de (6-3.1.1) se deduce fácilmente que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \qquad (6\text{-}3.1.2)$$

teniendo en cuenta que $x - a = (b - a) - (b - x)$,

$$[\,f(x) - f(a)\,]\,(b - a) - [\,f(b) - f(a)\,]\,(x - a) < 0,$$

$$[\,f(x) - f(b)\,]\,(b - a) + [\,f(b) - f(a)\,]\,(b - x) < 0$$

y

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \quad .$$

6-3.2 Definición

Se dice que una función $f{:}I \to \mathbf{R}$ es cóncava en el intervalo abierto I, si para cualesquiera que sean los puntos $a,x,b \in I$ con $a < x < b$, se tiene que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad .$$

Análogamente a lo establecido para funciones convexas, se verifica que una función f es cóncava en el intervalo I si para cualesquiera que sean los puntos $a,x,b \in I$ con $a < x < b$, se tiene que el punto $(x,f(x))$ de la gráfica de la función f queda por encima de la recta secante que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

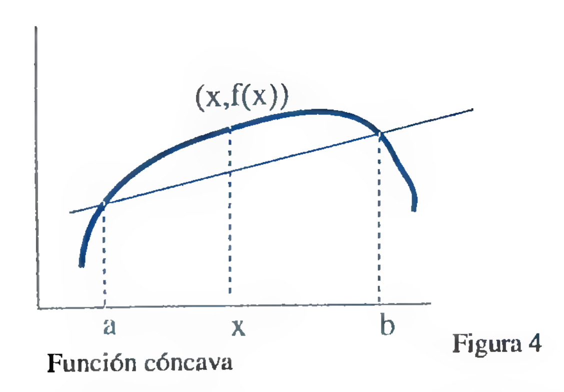


Figura 4

De la definición resulta inmediatamente que una función $f{:}I \to \mathbf{R}$ es cóncava (respectivamente, convexa) en el intervalo abierto I si y sólo si la función $-f$ es convexa (respectivamente, cóncava) en dicho intervalo.

Así pues, basta con estudiar las propiedades de las funciones convexas ya que de ellas se pueden obtener las de las funciones cóncavas teniendo en cuenta la equivalencia anterior.

6-3.3 Proposición

Si una función $f: I \to \mathbf{R}$ es convexa en el intervalo abierto I, entonces es continua en I.

Demostración

Sea $a \in I$, tomamos b y c dos puntos de I tales que $c < a < b$ (b y c existen por ser I abierto). De las desigualdades 6-3.1.2 resulta que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{para todo } a < x < b$$

y

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} < \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \quad \text{para todo } c < x < a.$$

Por consiguiente,

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c}(x - a) < f(x) - f(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

para todo $x \in I$ con $x\text{-}a < \min(b\text{-}a, c\text{-}a)$, de donde resulta que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Luego, f es continua en a.

6-3.4 Proposición

Si $f: I \to \mathbf{R}$ es una función cóncava en el intervalo abierto I, entonces f es continua en I.

Demostración

Si f es cóncava en I, entonces $-f$ es convexa en I. De la Proposición 6-3.3 resulta que $-f$ es continua en I y, por tanto, f también lo es.

6-3.5 Proposición

Si $f: I \to \mathbf{R}$ es una función convexa en el intervalo abierto I, entonces existen las derivadas laterales (por la derecha y por la izquierda) de la función f en todo punto de I y se verifica que

$$f'(a+) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b-) \qquad (6\text{-}3.5.1)$$

para todos $a,b \in I$ con $a < b$.

Demostración

De (6-3.1.2) resulta que las funciones $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, para $x \in I - \{a\}$, y $\frac{f(x) - f(b)}{x - b}$, para $x \in I - \{b\}$, son estrictamente crecientes en $I - \{a\}$ e $I - \{b\}$. Por consiguiente, existen las derivadas laterales $f'(a+)$ y $f'(b-)$

$$f'(a+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \inf\{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, a < x\}$$

y

$$f'(b-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \sup\{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}, x < b\}.$$

Por tanto, nuevamente de (6-3.1.2) se deduce que

$$f'(a+) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{y} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b-),$$

de donde se deduce trivialmente (6-3.5.1).

Si se supone que la función f es derivable en un punto $a \in I$, el resultado anterior se puede completar en la forma siguiente:

6-3.6 Proposición

Si $f: I \to \mathbf{R}$ es convexa en el intervalo abierto I y derivable en un punto $a \in I$, entonces se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a) < \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

para todo par de puntos $x,y \in I$ tales que $x < a < y$.

Demostración

Resulta inmediatamente de aplicar la Proposición 6-3.5 a los pares de puntos x,a y a,y, teniendo en cuenta que $f'(a) = f'(a+) = f'(a-)$.

La Proposición 6-3.6 tiene el siguiente significado geométrico.

6-3.7 Proposición

Si $f:I\to\mathbf{R}$ es una función convexa en el intervalo abierto I y f es derivable en un punto $a\in I$, entonces la gráfica de la función f queda por encima de la recta tangente a dicha gráfica en el punto $(a,f(a))$.

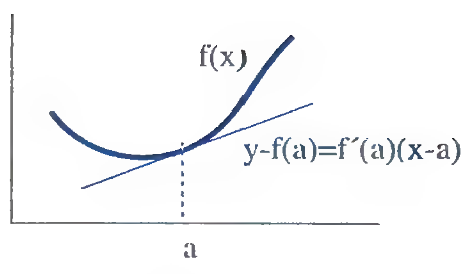


Figura 5

6-3.8 Teorema

Sea $f:I\to\mathbf{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I. La función f es convexa (respectivamente, cóncava) en I si y sólo si su derivada f' es una función estrictamente creciente (respectivamente, decreciente) en el intervalo I.

Demostración

Basta demostrar el caso convexo. Si f es convexa y $a,b\in I$ son tales que $a<b$, entonces de la Proposición 6-3.5 resulta que

$$f'(a) = f'(a+) < f'(b-) = f'(b)$$

y f' es estrictamente creciente.

Recíprocamente, supongamos $f' : I \to \mathbf{R}$ estrictamente creciente y sean $a,x,b \in I$ con $a < x < b$. Del teorema del incremento finito se deduce la existencia de $c,d\in I$ tales que $a<c<x<d<b$,

$$f(x) - f(a) = f'(c)\ (x-a) \quad \text{y} \quad f(b) - f(x) = f'(d)\ (b-x).$$

Como $f'(c)<f'(d)$, por ser f' estrictamente creciente, se tiene que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

y

$$[f(x) - f(a)]\,(b-x) < [f(b) - f(x)]\,(x-a). \qquad (6\text{-}3.8.1)$$

Como $b - x = (b-a) + (a-x)$ y $f(b) - f(x) = [f(b) - f(a)] + [f(a) - f(x)]$, de (6-3.8.1) resulta que

$[f(x) - f(a)]\,(b-a) + [f(x) - f(a)]\,(a-x) < [f(b) - f(a)]\,(x-a) + [f(a) - f(x)]\,(x-a)$

y, por tanto, $[f(x) - f(a)]\,(b - a) < [f(b) - f(a)]\,(x - a)$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

y por la Definición 6-3.1, resulta que f es convexa.

Ejemplo 7

Dadas las funciones $f_1(x) = \frac{x^2}{2}$ y $f_2(x) =$ sen x, vamos a dibujar las gráficas de las funciones f_1, f_1', f_2 y f_2' para mostrar que f_1' y f_2' son crecientes en los intervalos en que las gráficas de f_1 y f_2 son convexas y que f_2' es decreciente en los intervalos en que la gráfica de f_2 es cóncava.

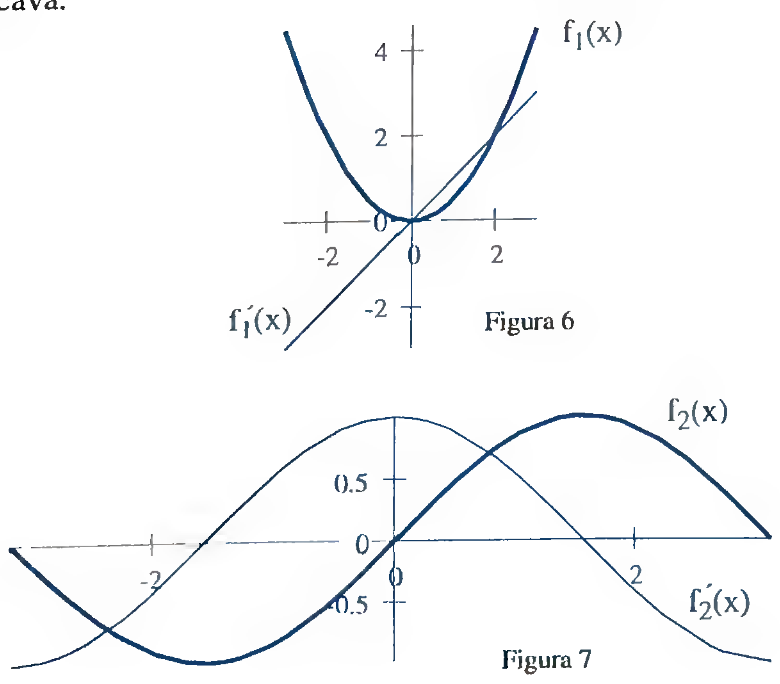


Figura 6

Figura 7

6-3.9 Corolario

Sea $f: I \rightarrow R$ una función con derivada segunda en el intervalo abierto I. Si $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces la función f es convexa (respectivamente, cóncava) en I.

Demostración

Resulta inmediatamente del Teorema 6-3.8 ya que si $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces f' es estrictamente creciente (estrictamente decreciente) en el intervalo I.

Ejemplo 8

Para hallar los intervalos de concavidad y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4},$$

inicialmente, calculamos la derivada segunda de la función f:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+1)}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2},$$

$$f''(x) = \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

No hay puntos en los que f'' se anule, ya que el numerador es positivo para todo x, pero en $x = \pm 2$ la función es discontinua, así pues, el signo de la función f'' es constante en cada uno de los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$. Por lo tanto, se utiliza un valor de prueba en cada intervalo para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad:

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < +\infty$
Valor prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Convexa	Cóncava	Convexa.

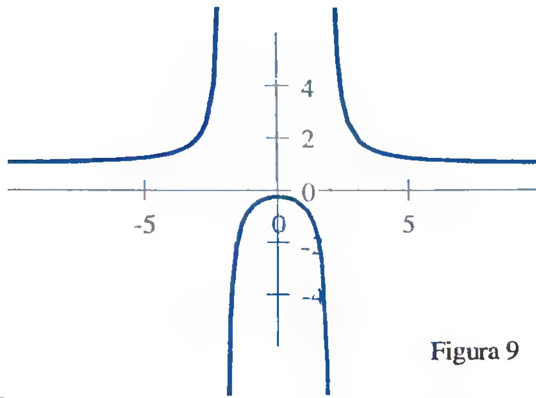


Figura 9

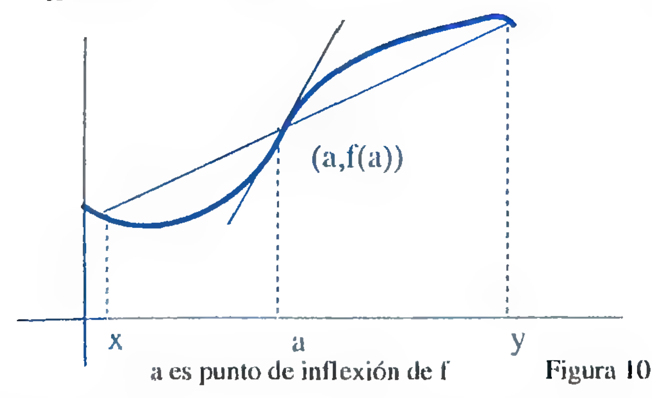
6-3.10 Definición

Sea $A \subset \mathbf{R}$ un conjunto abierto y $f{:}A \to \mathbf{R}$ una función continua en un punto $a \in A$. Se dice que la función f tiene una inflexión en el punto a, o que a es un punto de inflexión de la función f, si existe un entorno $N(a) = (b, c)$ contenido en A, tal que f es cóncava (convexa) en el intervalo (b, a) y convexa (cóncava) en el intervalo (a, c).

Si f es una función derivable en el punto a, de la definición anterior y de la Proposición 6-3.6 resulta que la función f tiene una inflexión en el punto a si existe un entorno $N(a) = (b, c)$ contenido en A, tal que

o bien $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(a)$ para todo $x \in N^*(a) = N(a) - \{a\}$, (6-3.10.1)

o bien $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a)$ para todo $x \in N^*(a) = N(a) - \{a\}$. (6-3.10.2)



a es punto de inflexión de f Figura 10

Desde un punto de vista geométrico, si la función derivable f tiene una inflexión en el punto a, entonces existe un entorno N(a) tal que la

gráfica de la función restringida a dicho entorno está por encima de la tangente a la gráfica de f en el punto (a,f(a)), a un lado de este punto y por debajo al otro lado.

Nótese que esto resulta de que (6-3.10.1) equivale a que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{si } x > a \text{ con } x \in N(a)$$

y

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{si } x < a \text{ con } x \in N(a),$$

y análogamente sucede partiendo de (6-3.10.2).

6-3.11 Proposición

Si $A \subset \mathbf{R}$ es un conjunto abierto y $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ es una función con derivada segunda continua en un entorno de un punto $a \in A$ y f tiene una inflexión en el punto a, entonces $f''(a) = 0$.

Demostración

Si $f''(a) \neq 0$, entonces existe un entorno N(a) tal que o bien $f''(x) > 0$ para todo $x \in N(a)$, o $f''(x) < 0$ para todo $x \in N(a)$.

Del Corolario 6-3.9 resulta que la restricción de f a N(a) es una función convexa o cóncava, y de la Proposición 6-3.6 se deduce que a no es un punto de inflexión de f, lo que es una contradicción.

Observación: Téngase en cuenta que la condición $f''(a) = 0$ es necesaria pero no suficiente para que el punto a sea un punto de inflexión de la función f. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ es convexa en un entorno del punto cero y, por lo tanto, $x = 0$ no es un punto de inflexión de la función f a pesar de que $f''(0) = 0$.

Ejemplo 9

Determinamos los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1.$$

Calculamos la función derivada segunda de la función f:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x \quad ; \quad f''(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6(2x-1)(x+1).$$

Los posibles puntos de inflexión son aquellos en los que se anula f'', es decir, $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$.

Estudiamos si en estos puntos la función pasa de cóncava a convexa o

viceversa, para ello se analiza el signo de f" en los siguientes intervalos:

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < +\infty$
Valor prueba	$x = -2$	$x = 0$	$x = 1$
Signo de f"(x)	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(1) > 0$
Conclusión	Convexa	Cóncava	Convexa.

Luego, los puntos $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$ son puntos de inflexión de la función f.

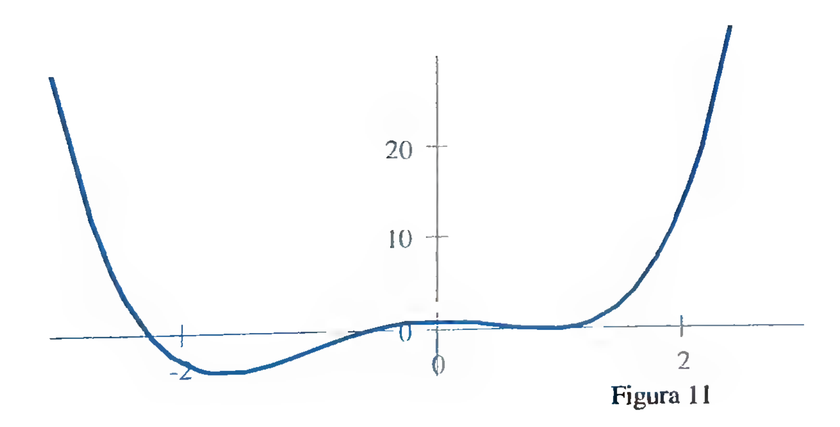


Figura 11

Sección

6-4 Estudio local de funciones

El Teorema 5-2.2 establece como condición necesaria para que una función derivable en un punto tenga un máximo o un mínimo relativo en dicho punto, que la derivada de la función se anule en ese punto. Como vimos en el Ejemplo 5 del Capítulo 5, la condición anterior permite determinar los posibles puntos de máximo o de mínimo relativo de una función derivable, debiéndose determinar a posteriori cuales de estos puntos tienen dicho carácter.

La fórmula de Taylor nos proporciona un procedimiento sistemático para efectuar, bajo ciertas condiciones, tal determinación, y estudiar los puntos de inflexión y la convexidad y concavidad locales de la función.

6-4.1 Teorema

Sea f una función con derivada n-ésima en un punto a tal que $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

- Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a.
- Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a.
- Si n es impar, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo relativo en a.

Demostración

De la fórmula de Taylor resulta que existe un entorno del punto a tal que para todo x pertenenciente a dicho entorno se verifica que

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \to a} \frac{E_n(x)}{(x-a)^n} = 0 .$$

Por consiguiente, existe un entorno $N(a)$ tal que $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n}$ tiene

el mismo signo que $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ para todo $x \in N^*(a) = N(a) - \{a\}$.

Luego, si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces $f(x) - f(a) > 0$ para todo $x \in N^*(a)$ y a es un punto de mínimo relativo de la función f.

Análogamente, si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces $f(x) - f(a) < 0$ para todo $x \in N^*(a)$ y a es un punto de máximo relativo de la función f.

Si n es impar, entonces $(x-a)^n$ tiene signos distintos según que sea $x > a$ o $x < a$ y, por consiguiente, ocurre lo mismo con $f(x) - f(a)$, de donde resulta que a no es punto ni de máximo relativo ni de mínimo relativo de la función f.

6-4.2 Teorema

Sea f una función con derivada n-ésima en un punto a, con $n \geq 2$, tal que $f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

- Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces existe un entorno $N(a)$ tal que la restricción de f a $N(a)$ es una función convexa.

- Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces existe un entorno $N(a)$ tal que la restricción de f a $N(a)$ es una función cóncava.

- Si n es impar, entonces f tiene un punto de inflexión en a.

Demostración

De la fórmula de Taylor resulta que existe un entorno del punto a tal que para todo x perteneciente a dicho entorno se tiene que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x)$$

con $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{E_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Por consiguiente, existe un entorno $N(a)$ tal que si para cada $x \in N(a)$ denotamos por $t(x)$ a la ordenada del punto de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,f(a))$ que tiene por abscisa x,

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{para todo } x \in N(a).$$

Si n es par entonces el signo de $f(x) - t(x)$ coincide con el de $f^{(n)}(a)$ para todo $x \in N(a)$ y la restricción de f a $N(a)$ será convexa si $f^{(n)}(a) > 0$ y cóncava si $f^{(n)}(a) < 0$.

Si n es impar entonces $f(x) - t(x)$ tiene signos contrarios para $x < a$ y para $x > a$, con $x \in N^*(a)$, teniendo por tanto la función f una inflexión en el punto a.

Ejemplo 10

Se hallan los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x .$$

La función derivada primera, $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\,\text{sen}\,x$,

la función derivada segunda, $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$,

y la función derivada tercera, $f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\,\text{sen}\,x$,

son nulas para $x = 0$.

Finalmente, la derivada cuarta, $f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$,

$$f^{(4)}(0) = 4.$$

Como $n = 4$ es par y $f^{(4)}(0) > 0$, la función f tiene un mínimo en $x = 0$.

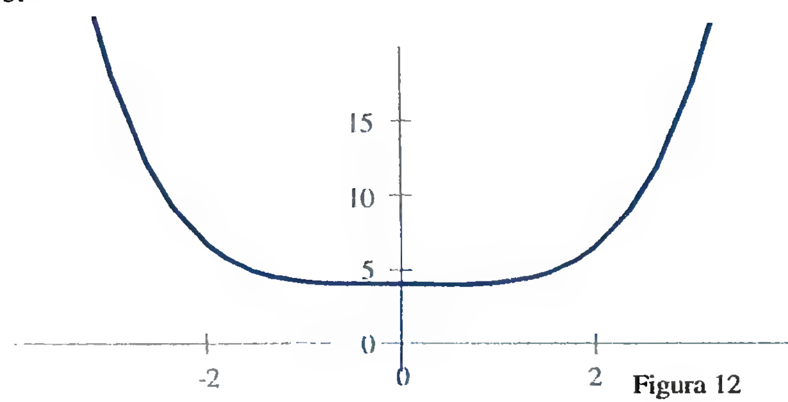


Figura 12

Sección

6-5

Representación gráfica de funciones

Para obtener la gráfica de una función f deben estudiarse los siguientes aspectos:

1. Campo de definición de la función f o dominio de f.

El conjunto de los valores x para los que la expresión de f(x) está bien definida.

2. Puntos de discontinuidad, continuidad y derivabilidad.

El conjunto de puntos en los que la función f no es continua, el conjunto de puntos donde la función es continua y el conjunto de los puntos donde es derivable.

3. Simetrías.

- Respecto al eje de ordenadas:

$f(x) = f(-x)$ para todo x del campo de definición.

Si una función cumple esta igualdad se dice que es una función par.

- Respecto al origen:

$f(x) = -f(-x)$ para todo x del campo de definición.

Si una función cumple esta igualdad se dice que es una función impar.

4. Asíntotas.

- Asíntota paralela al eje de ordenadas o asíntota vertical. Es la recta $x = a$ tal que $\lim_{x \to a+} f(x)$ o $\lim_{x \to a-} f(x)$ es infinito, $+\infty$ o $-\infty$.

- Asíntota paralela al eje de abscisas o asíntota horizontal. Es la recta $y = b$ tal que $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

- Asíntota oblicua. Es la recta de ecuación $y = mx + n$ donde

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{o} \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

y

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \quad \text{o} \quad n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx).$$

5. Puntos de corte con los ejes coordenados.

- Con el eje de abscisas. Son los puntos $(x,0)$ tales que x pertenece al dominio de f y es solución de la ecuación $f(x) = 0$.

- Con el eje de ordenadas. Es el punto $(0,f(0))$.

Nótese que si 0 no pertenece al dominio de f, entonces f(0) no está definido y, por tanto, no existe punto de corte con el eje de ordenadas

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para su determinación a partir de la derivada primera de la función, se aplica el Corolario 5-3.4 para funciones derivables.

7. Máximos y mínimos relativos.

Se tiene en cuenta el Teorema 6-4.1 para funciones derivables.

8. Intervalos de concavidad y convexidad.

Se tiene en cuenta el Teorema 6-4.2 para funciones derivables.

9. Puntos de inflexión.

Se tiene en cuenta el Teorema 6-4.2 para funciones derivables.

Ejemplo 11

Obtener la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$.

Como la expresión de f(x) no tiene sentido si se anula el denominador, se estudia la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ que tiene por soluciones $x = -2$ y $x = 1$.

Por tanto, resulta que la función f está definida en

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty).$$

Por otra parte,

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = -\infty, \text{ y } \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = +\infty.$$

Además, $y = 1$ es una asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1 .$$

El único punto de corte con los ejes es el (0,0).

$$\text{Por ser} \quad f'(x) = \frac{2x(x^2 + x - 2) - x^2(2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x^2 + x - 2)^2}$$

para $x \in \mathbf{R}$-{-2,1}, resulta que

$$f'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \;\; y \;\; x = 4$$

y que

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{si} \;\; x \in (-\infty, -2), \\ f'(x) > 0 & \text{si} \;\; x \in (-2, 0), \\ f'(x) < 0 & \text{si} \;\; x \in (0, 1), \\ f'(x) < 0 & \text{si} \;\; x \in (1, 4), \\ f'(x) > 0 & \text{si} \;\; x \in (4, +\infty). \end{array}$$

Por tanto, f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1) \cup (1, 4)$. Además,

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x^2 + x - 2)^2 - 2(x^2 - 4x)(x^2 + x - 2)(2x+1)}{(x^2 + x - 2)^4}$$

para todo $x \in \mathbf{R}$-{-2,1}. En particular para $x = 0$ y $x = 4$ se tiene

$$f''(0) = -1 < 0 \quad y \quad f''(4) = \frac{1}{81} > 0 .$$

Así pues, la función tiene un máximo relativo en (0,0) y un mínimo relativo en $(4, \frac{8}{9})$.

Por otra parte, la gráfica de la función corta a la asíntota $y = 1$ en el punto (2,1) y f tiene un punto de inflexión en el intervalo (6.1 , 6.2).

Finalmente, calculamos los valores de f para algunos valores de x:

x =	-4	-3	-1	3	4	5
f(x) =	1.6	2.25	-0.5	0.9	0.88	0.89.

La gráfica de la función f, al tener en cuenta todos los datos anteriores, tiene la forma la siguiente:

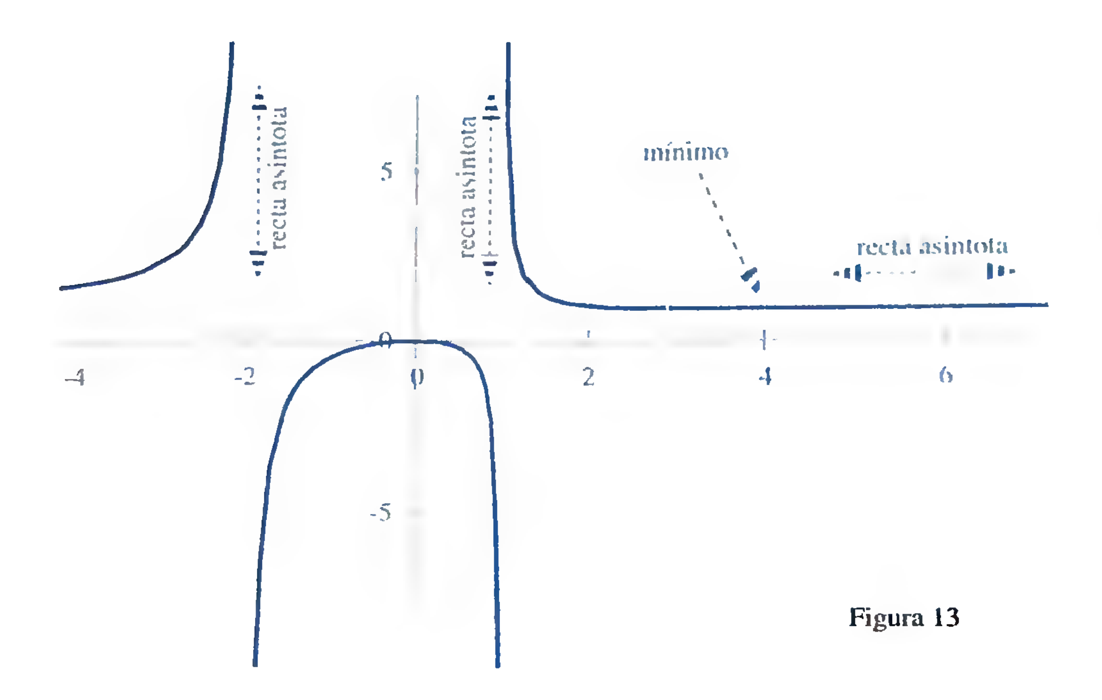


Figura 13

Problemas Propuestos

1) Calcular sen x con un error menor o igual que $\frac{1}{720}$, para $x \in (0, 1)$.

2) Hallar los máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x) = x^2 - |x| + 2.$$

3) Demostrar que la suma de un número real mayor que cero y su inverso no es menor que 2.

4) Representar gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$.

5) Representar gráficamente la función $y = x \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

6) Representar gráficamente la función $y = \operatorname{sen}^2 x$.

7) Hallar la derivada n-ésima de la función $h(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

8) Hallar los lados del triángulo isósceles de perímetro 1 que tiene área máxima.

9) La derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = x^2 - 4x$. Determinar

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Los intervalos de concavidad y de convexidad de f.

c) Los extremos relativos y los puntos de inflexión de f.

10) Estudiar la gráfica de la función $f(x) = e^{-x} Lnx$.

Capítulo 7

La Integral de Riemann

En geometría elemental se deducen fórmulas para el cálculo del área de algunas figuras planas, en general basándose en el área de triángulos o de sencillos objetos circulares. La realidad es que hasta la aparición del Cálculo Infinitesimal no fue posible acercarse de una manera sistemática al concepto de área de un cierto conjunto plano. La herramienta que introduciremos , la integral , es precisamente la que va a posibilitar el acercamiento.

No debe el lector concebir falsas esperanzas de encontrar aquí un método universal para hallar el área de cualquier conjunto en el plano, de hecho, nos ocuparemos sólo de conjuntos delimitados por el eje OX, una función $f \geq 0$ y un par de rectas paralelas al eje OY, como el de la Figura 1.

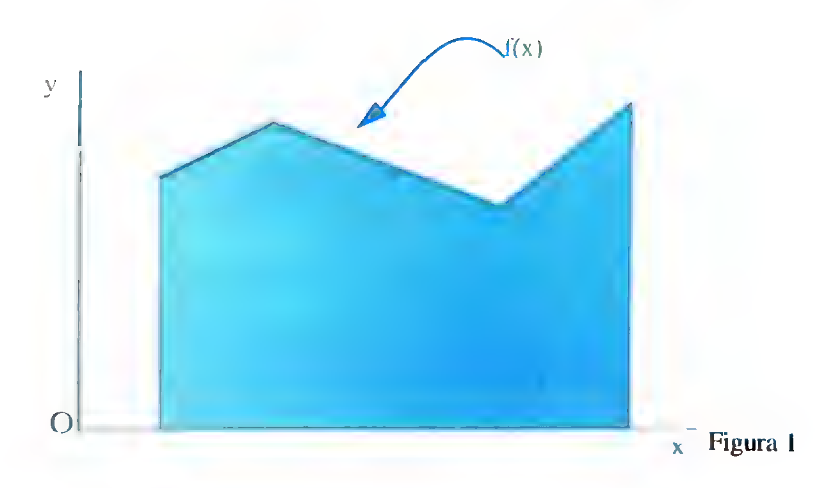


Figura 1

La integral permite la asignación de un número a ciertos conjuntos análogos a los anteriores pero eliminando la hipótesis de que $f \geq 0$, como en la Figura 2, con lo cual el **área** no corresponderá al "área física" sino al área del conjunto por encima del eje OX menos el área por debajo del eje OX.

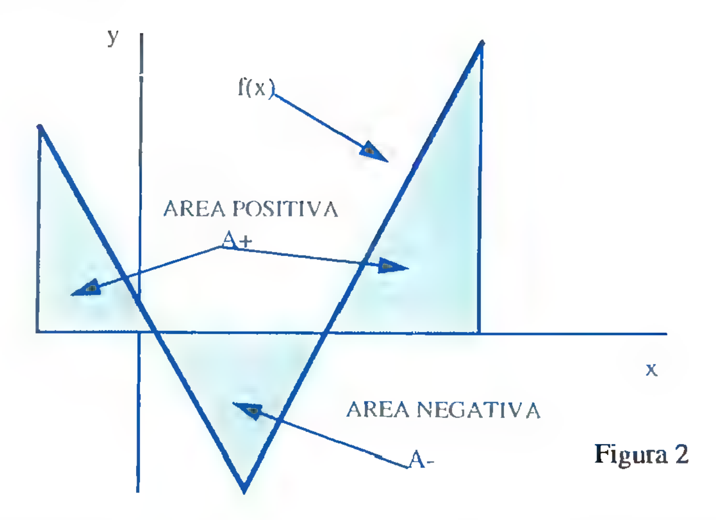


Figura 2

De hecho con la palabra área de un conjunto M nos queremos referir a un número asignado a dicho conjunto y que tiene propiedades ya intuidas desde el tiempo de los griegos, por ejemplo,

Invarianza respecto de traslaciones; el área de un conjunto permanece constante cuando lo trasladamos en el plano.

Propiedad aditiva del área; el área de la unión de dos conjuntos disjuntos es la suma de las áreas de cada uno de ellos.

Principio de exhaución, es decir, que el área de un conjunto es el supremo de las áreas de conjuntos más sencillos contenidos en él.

Desafortunadamente no se puede definir un concepto de "área universal" para todos los conjuntos del plano, sin embargo, podemos calcular un área para conjuntos como los anteriormente representados, y no todos.

Se parte de un tipo de conjuntos, los rectángulos cuyo área es bien conocida. El método para calcular el área del conjunto A consiste en considerar aquellos conjuntos que son uniones finitas de rectángulos contenidos en el conjunto A y también conjuntos que son uniones finitas de rectángulos que contienen al conjunto A como se muestra en las

figuras siguientes.

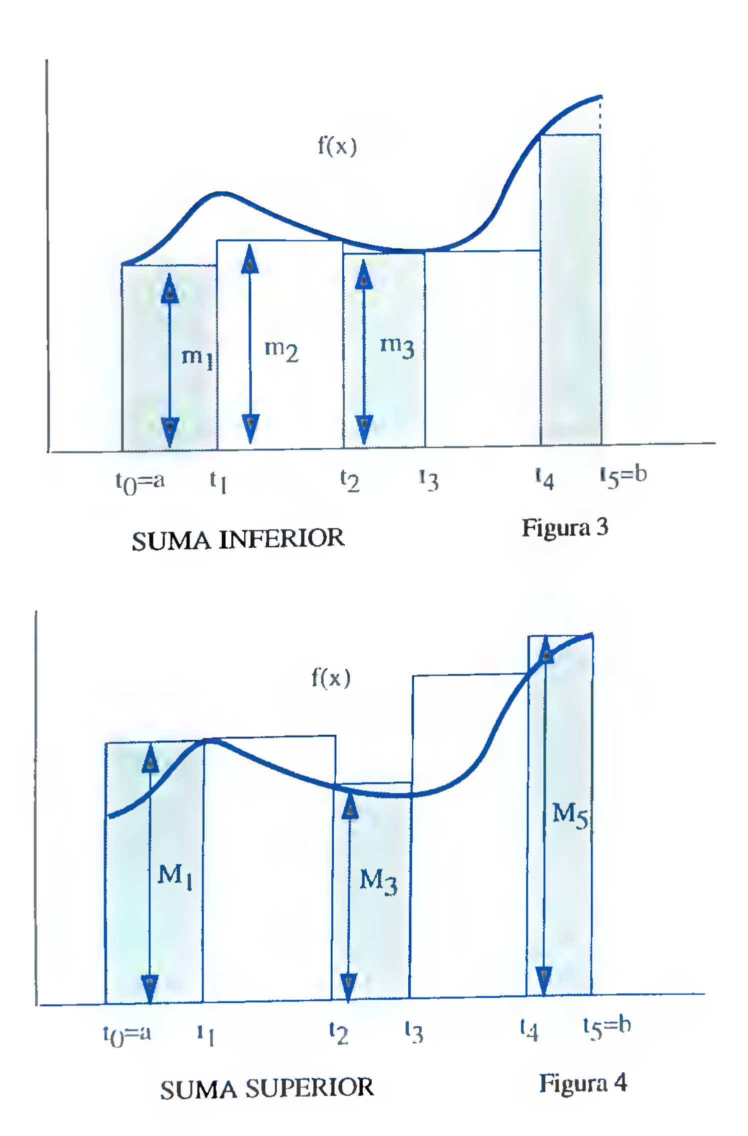


Figura 3

Figura 4

El área del conjunto de la Figura 3 es

$$s = m_1 (t_1 - t_0) + m_2 (t_2 - t_1) + m_3 (t_3 - t_2) + m_4 (t_4 - t_3) + m_5 (t_5 - t_4),$$

y el área de los rectángulos de la Figura 4 es

$$S = M_1 (t_1 - t_0) + M_2 (t_2 - t_1) + M_3 (t_3 - t_2) + M_4 (t_4 - t_3) + M_5 (t_5 - t_4).$$

Si observamos que los conjuntos L de la forma de la Figura 3 están contenidos en el conjunto A, entonces $s \leq$ área(A) para todo conjunto L. Análogamente los conjuntos de la forma H que representa la Figura 4 contienen al conjunto A , por lo cual $S \geq$ área(A). Se observa que $s \leq S$ para cualquier conjunto L y H, si bien es conveniente que lo compruebe el lector. Intuitivamente, de existir el área de A, y aquí se podría apelar al Principio de Exhaución , será de la forma:

SUMA INFERIOR $\leq$ AREA(A) $\leq$ SUMA SUPERIOR.

El área de los conjuntos de la forma de A, se denomina integral de la función f en el intervalo [a,b] y se denota por

$$\int_b^a f \ , \quad \int_b^a f \ , \quad \int_a^b f(x)\,d(x) \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x)\,d(x) \,.$$

Otro aspecto que debemos resaltar es el hecho de que este método exige que la función f sea acotada, pues si no, habría rectángulos de altura infinita, y también que el intervalo sea acotado, pues si no, aparecerían rectángulos de base infinita, con lo que s ó S serían infinitos y no permitiría asignar un número al área del conjunto.

Sección

7-1 Definición de la integral de Riemann

En todo el capítulo se considerará $I = [a,b]$ con $-\infty < a \leq b < \infty$ y una función $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ acotada.

7-1.1 Definición

Una partición p del intervalo I es una colección finita y creciente de puntos de la forma $p = \{ a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b \}$.

Denotaremos por $P(I)$ a la familia de todas las particiones finitas de I.

Ejemplo 1

En el intervalo $I = [0,1]$, fijado un número natural n,

$$p = \{ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1 \} \text{ donde } t_k = \frac{k}{n}, \text{con } k = 0, 1, 2 ... n,$$

es una partición.

Ejemplo 2

En el intervalo $I = [a,b]$, fijado un número natural n,

$$p = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b\} \text{ donde } t_k = a + (b-a)\frac{k}{n}, \text{con } k = 0,1,....n,$$

$$p = \{ a = t_0 < t_1 = a + (b - a)\frac{1}{n} < t_2 = a + (b - a)\frac{2}{n} < ... < t_n = b \}.$$

es una partición.

Observación: Esta última partición y la del Ejemplo 1 son particiones homogéneas pues dividen el intervalo en partes iguales. Esta homogeneidad no es necesaria, y por tanto, se puede considerar la siguiente partición del intervalo $[0,1]$:

$$p = \{0 = t_0 < t_1 = 0.1 < t_2 = 0.23 < t_3 = \frac{3}{10} < t_4 = 0.5 < t_5 = \frac{3}{4} < 1 = t_6\}.$$

7-1.2 Definición

Sean $I = [a,b]$ con $-\infty < a \leq b < \infty$ y una función $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ acotada.

Para la partición $p = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < b = t_n\}$ denotamos

$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} < x < t_i\}$ y $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} < x < t_i\}$.

Se define:

Suma inferior de f respecto de la partición p a la siguiente suma

$$s(f,p) = \sum_{1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

Suma superior de f respecto de la partición p a la siguiente suma

$$S(f,p) = \sum_{1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}).$$

En este punto resulta imprescindible que el lector asocie las definiciones analíticas de $s(f,p)$ y $S(f,p)$.

Observación: Se han usado ínfimos y supremos en la definición y no mínimos y máximos puesto que la función no es necesariamente continua y no se puede asegurar la existencia de estos últimos. Como la función es acotada se asegura la existencia y finitud de los primeros aunque quizás no existan los segundos.

7-1.3 Construcción previa a la integral

En el conjunto $P(I)$ de las particiones de I, se establece el siguiente orden: Dadas $p,q \in P(I)$ se dice que q es más fina que p, $p < q$, si el conjunto p está contenido en el conjunto q, es decir,

$p < q$ si y sólo si para cualquier $t \in p$ se verifica que $t \in q$.

Este orden no es un orden total puesto que existen particiones que no son comparables entre sí.

Ejemplo 3

Dados el intervalo $I = [0,2]$ y las tres particiones siguientes:

$$p_1 = \{0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{2} < x_2 = 1 < x_3 = \sqrt{2} < x_4 = 2\},$$

$$p_2 = \{0 = k_0 < k_1 = \frac{1}{4} < k_2 = \frac{1}{2} < k_3 = \frac{3}{4} < k_4 = 1 < k_5 = \frac{7}{5} < k_6 = \sqrt{2} < k_7 = 2\},$$

$$p_3 = \{0 = r_0 < r_1 = \frac{9}{10} < r_2 = 1 < r_3 = \frac{9}{5} < r_4 = 2\},$$

se tiene que $p_1 < p_2$ y p_3 no es comparable con p_1 y p_2.

Propiedades de $s(f,p)$ y $S(f,p)$.

- Para toda $p \in P(I)$ se tiene que $s(f,p) \leq S(f,p)$.

En efecto, dada $p = \{ a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < b = t_n \}$ se tiene que para cada i , $m_i < M_i$ por lo que es obvio que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}).$$

- Si $p > q$, entonces $s(f,q) \leq s(f,p)$ y $S(f,q) \geq S(f,p)$.

Supuesto que p tiene un punto más que q, es decir, si $q = \{a = t_0 < ... < t_k < t_{k+1} < .... < b = t_n\}$ y $p = \{a = t_0 < ... < t_k < u < t_{k+1} < .... < b = t_n\}$.

Consideramos las sumas inferiores

$$s(f,q) = m_1(t_1 - t_0) + ... + m_{k-1}(t_{k-1} - t_{k-2}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + ... + m_n(t_n - t_{n-1}),$$

$$s(f,p) = m_1(t_1 - t_0) + ... + m_{k-1}(t_{k-1} - t_{k-2}) + m'_k(u - t_{k-1}) + ...$$

$$... + m''_k(t_k - u) + ... + m_n(t_n - t_{n-1})$$

donde $m'_k = \inf\{ f(x) : x \in [t_{k-1}, u] \}$, $m''_k = \inf\{ f(x) : x \in [u, t_k] \}$ y $m_k = \inf\{ f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k] \}$.

Obsérvese que m'_k y m''_k son mayores o iguales que m_k, luego

$$s(f,p) \geq s(f,q).$$

Análogamente se comprueba que $S(f,q) \geq S(f,p)$.

En el caso general, $p > q$, como p tiene un número finito de términos más que q, aplicamos varias veces el proceso anterior añadiendo cada vez un punto más.

- Para cualesquiera particiones p y q de $[a,b]$, se tiene que

$$s(f,p) \leq S(f,q).$$

Obsérvese que no se exige que se puedan comparar las particiones,

siendo cualquier suma inferior menor que cualquier suma superior.

En efecto, consideramos $p_1 = p \cup q$ que es la partición resultante de unir p y q y ordenar los puntos, para ésta se tiene que

$$s(f,p) \leq s(f,p_1) \leq S(f,p_1) \leq S(f,q).$$

El conjunto $\{ s(f,p) : p \in P(I) \}$ está acotada superiormente por el número $S(f,q)$ para un q prefijado, luego existe supremo.

El conjunto $\{ S(f,p) : p \in P(I) \}$ está acotado inferiormente por cualquier $s(f,q)$, por lo que existe ínfimo. Este hecho permite definir la integral.

7-1.4 Definición de la integral

Sea $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una función acotada, se definen:

integral inferior de f en [a,b] por $L\int_a^b f = \sup\{s(f,p) : p \in P(I)\}$.

integral superior de f en [a,b] por $U\int_a^b f = \inf\{S(f,p) : p \in P(I)\}$.

Estas dos pseudo-integrales existen para todas las funciones acotadas como se vio en 7-1.3. Para definir la integral hay que reducir la familia de funciones sobre las que se aplica la integral.

Una función se dice **integrable** si su integral superior coincide con su integral inferior, es decir:

$$f \text{ es integrable si y sólo si } U\int_a^b f = L\int_a^b f.$$

Al valor común se le denomina **integral** de la función f en [a,b],

$$U\int_a^b f = L\int_a^b f = \int_a^b f,$$

utilizándose generalmente la notación siguiente: $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$

En el caso de existir la integral, y por ser un supremo y un ínfimo, la

integral es única.

A las funciones integrables según el método expuesto se las denomina funciones **integrables Riemann.**

Ejemplo 4

La función de Dirichlet no es integrable. Esta función se define como $f : I = [0,1] \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = 1$ si x es irracional. No es integrable puesto que sus integrales superior e inferior son distintas.

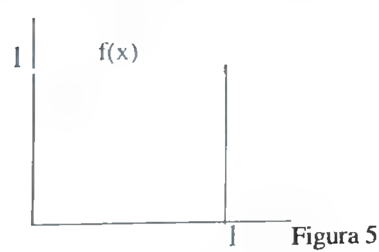


Figura 5

Para cualquier partición de [0,1], $p = \{0 = t_0 < t_1 < ... < 1 = t_n\}$, se tiene $m_i = \inf\{f(x): t_{i-1} < x < t_i\} = 0$, debido a que en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ hay infinitos números racionales, para todo i =1,...,n. Además, en $[t_{i-1}, t_i]$ también hay infinitos irracionales, así pues, $M_i = 1$ para todo i = 1,...,n.

Luego, para toda $p \in P([0,1])$ se tiene

$$s(f,p) = \sum_1^n m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_1^n 0 (t_i - t_{i-1}) = 0$$

y

$$S(f,p) = \sum_1^n M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_1^n (t_i - t_{i-1}) = 1.$$

Por lo tanto, $L\int_a^b f = \sup\{ s(f,p) : p \in P(I)\} = 0,$

$$U\int_a^b f = \inf\{ S(f,p) : p \in P(I)\} = 1.$$

Sección

7-2 Funciones integrables

La existencia de la función de Dirichlet, Ejemplo 4, nos plantea la pregunta de que funciones acotadas son integrables. Una caracterización nos la da un teorema atribuido a Riemann.

7-2.1 Teorema de caracterización de Riemann

Sea $f : I = [a,b] \to \mathbf{R}$ acotada. Una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en I es que

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ exista } p \in P(I) \text{ tal que } S(f,p) - s(f,p) \leq \varepsilon.$$

Demostración:

Si se cumple la condición, dado $\varepsilon > 0$ existe $p_1 \in P(I)$ tal que

$S(f,p_1) - s(f,p_1) \leq \varepsilon$. Entonces, como $U\int_a^b f \leq S(f, p_1)$ y $L\int_a^b f \geq s(f, p_1)$,

se tiene

$$U\int_a^b f - L\int_a^b f \leq S(f,p_1) - s(f,p_1) \leq \varepsilon.$$

Como esta desigualdad se verifica para todo $\varepsilon > 0$, entonces la diferencia entre las integrales superior e inferior es 0, y f es integrable.

Si f es integrable, dado $\varepsilon > 0$, como

$$L\int_a^b f = \sup\{ s(f, p) : p \in P(I) \} \quad \text{y} \quad U\int_a^b f = \inf\{ S(f, p) : p \in P(I) \},$$

entonces, existen p y p', particiones de I, tales que

$$L\int_a^b f - s(f, p') \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(f, p) - U\int_a^b f \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $q = p' \cup p$, la partición formada por los puntos de p' y p. Obviamente $q > p'$ y $q > p$, además, por ser f integrable se tiene que

$$L\int_a^b f = U\int_a^b f ,$$

luego, $S(f, q) - s(f, q) \leq \varepsilon$.

Este teorema resuelve de forma abstracta el problema de la caracterización de las funciones integrables. De hecho permite asegurar que tipo de funciones son integrables.

7-2.2 Corolario

Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Demostración.

Por ser f continua en un conjunto compacto es una función acotada y uniformemente continua en $[a,b]$, es decir, para todo $\varepsilon' > 0$ existe un $\delta' > 0$ tal que si $|x - y| \leq \delta'$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon'$.

Dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, y una partición homogénea $p = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < b = t_n\}$ tal que $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta'$, como se vió en el Ejemplo 2, se tiene

$$S(f,p) - s(f,p) = \sum_1^n M_i\,(t_i - t_{i-1}) - \sum_1^n m_i\,(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_1^n (M_i - m_i)\,(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon.$$

Este corolario nos permite poner a cualquier función continua como ejemplo de función integrable en un intervalo cerrado y acotado. Recuérdese que en este tipo de conjuntos las funciones continuas son acotadas por el Teorema 4-2.3. de Weierstrass.

Ejemplo 5

La siguiente función f es integrable:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\text{sen}^2(x-1)\,\text{sen}^2(x+1)}{(x+1)\,(x-1)\,\text{Ln}(|x|)} & x \in [-3,3] - \{-1,1,0\} \\ \dfrac{-\text{sen}^2(2)}{2} & x = -1 \\ 0 & x = 0 \\ \dfrac{\text{sen}^2(2)}{2} & x = 1 \end{cases}$$

Los únicos puntos de posible discontinuidad de f son los puntos $\{-1, 0, 1\}$, calculemos pues el límite en cada uno de esos puntos.
En $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x\,\text{sen}^2(x+1)\,\text{sen}^2(x-1)}{(x-1)\,(x+1)\,\text{Ln}(|x|)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2(x+1)}{x+1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{Ln}(|x|)} = 0 = f(0),$$

pues es el producto de los siguientes límites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2(x-1)}{x-1} = -\text{sen}^2(-1) \ , \ \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2(x+1)}{x+1} = \text{sen}^2(1) \ \text{ y}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{Ln}(|x|)} = 0.$$

En $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\text{sen}^2(2)}{2} = f(1)$$

pues este límite se descompone en el producto de los siguientes límites

$$\lim_{x \to 1} x, \ \lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}^2(x+1)}{x+1}, \ \lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}, \ \lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{\text{Ln}(|x|)} .$$

En $x = -1$ se prueba, como en el caso $x = 1$, que la función es continua

y en consecuencia la función es integrable. De hecho su gráfica es de la forma siguiente:

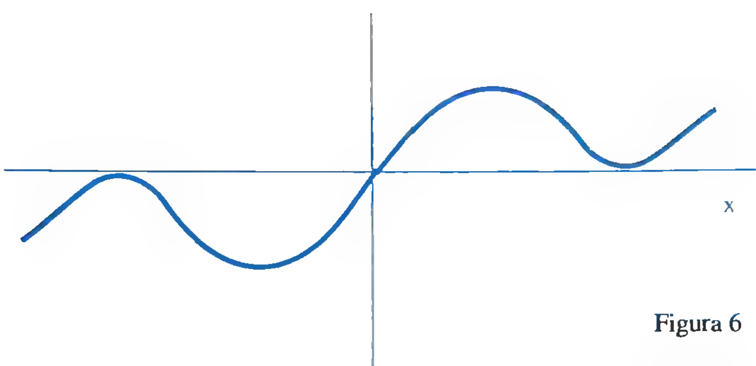


Figura 6

La clase de las funciones continuas puede ser ampliada a otros tipos de funciones más generales que son igualmente integrables.

7-2.3 Corolario de Dirichlet.

Si f es una función acotada en [a,b] y continua en [a,b] salvo en un conjunto finito de puntos, entonces f es una función integrable.

Demostración.

Suponemos, sin perdida de generalidad, que los puntos de discontinuidad $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ son puntos interiores del intervalo [a,b].

Sean $M = \sup\{\, |f(x)| : x \in [a,b]\,\}$, e $(y_i - \delta, y_i + \delta)$ el intervalo que aísla la discontinuidad y_i, con $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4Mk}$, es decir, que sólo contiene a la discontinuidad y_i.

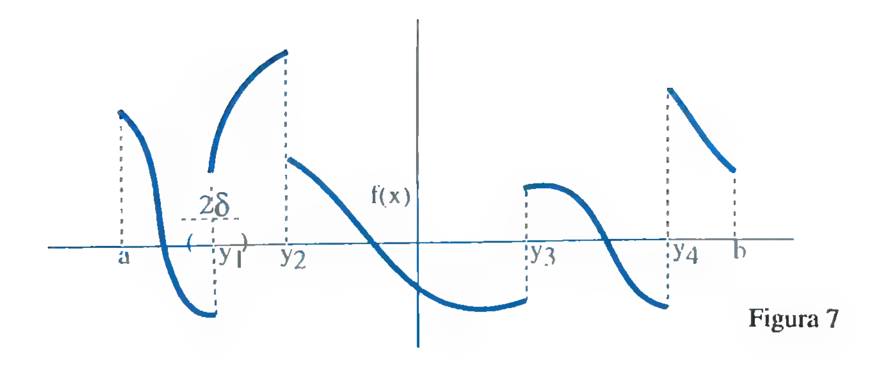


Figura 7

En cada uno de los intervalos $[a,y_1-\delta]$, ... , $[y_i+\delta,y_{i+1}-\delta]$, ..., $[y_k+\delta,b]$, la función es integrable puesto que es continua. Por tanto, para $\frac{\varepsilon}{2(k+1)}$ existe una partición p_0 en $[a,y_1-\delta]$ tal que

$$S(f,p_0) - s(f,p_0) < \frac{\varepsilon}{2(k+1)},$$

una partición p_i en $[y_i-\delta,y_i+\delta]$, tal que

$$S(f,p_i) - s(f,p_i) < \frac{\varepsilon}{2(k+1)},$$

y una partición p_k en $[y_k-\delta,b]$ tal que

$$S(f,p_k) - s(f,p_k) < \frac{\varepsilon}{2(k+1)}$$

Al considerar la partición $p = p_0 \cup p_1 \cup .... \cup p_k$ se tiene que

$$S(f,p) - s(f,p) < S(f,p_0) - s(f,p_0) + 2\frac{\varepsilon}{4Mk}M + S(f,p_1) - s(f,p_1) + 2\frac{\varepsilon}{4Mk}M$$

$$+ S(f,p_2) - s(f,p_2) + 2\frac{\varepsilon}{4Mk}M + ... + S(f,p_k) - s(f,p_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por tanto, la función es integrable.

Observación: Para hacer referencia a una función acotada en $[a,b]$ y continua en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos suele decirse que se tiene una función continua a trozos en $[a,b]$.

El último teorema asegura que las funciones continuas a trozos en intervalos compactos son funciones integrables.

Ejemplo 6

La función $$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ \cos(x) & \text{si} \quad x \in (0,2) \\ \operatorname{Ln}(x) & \text{si} \quad x \in [2,3] \end{cases}$$

es integrable en el intervalo $[-1,3]$ puesto que es continua a trozos.

En el corolario siguiente se estudia un tipo de funciones que pueden tener incluso infinitas discontinuidades pero que son integrables.

7-2.4 Corolario

Si f es una función monótona creciente, o decreciente, en $[a,b]$, entonces f es integrable.

Demostración.

Lo demostramos para funciones crecientes pues para decrecientes la demostración es análoga.

La función es acotada pues $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$ para todo $t \in [a,b]$.

Comprobamos a continuación que se cumple la condición de Riemann. Sea $\varepsilon > 0$ y $p = \{a = t_0 < t_1 < ... < b = t_n\}$ una partición tal que $\max\{|t_i - t_{i-1}|: i=1...n\} < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ (análoga a la del Ejemplo 2), entonces se cumple que

$$S(f,p) - s(f,p) = \sum_{1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Por ser f creciente se cumple que
$m_i = \inf\{f(x): t_{i-1} < x < t_i\} = f(t_{i-1})$ y $M_i = \sup\{f(x): t_{i-1} < x < t_i\} = f(t_i)$,
luego,

$$S(f,p) - s(f,p) = \sum_{1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) \leq \varepsilon.$$

Ejemplo 7

La siguiente función posee infinitas discontinuidades en [0,1] y es integrable en dicho intervalo.

Se considera la sucesión de puntos $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, que divide al intervalo [0,1] en infinitas partes y definimos la función

$$f(t) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad t \in [\,1 - \frac{1}{n},\, 1 - \frac{1}{n+1}\,), \text{ y}$$
$$f(1) = 1.$$

Esta función es monótona creciente, y por tanto integrable, pero tiene discontinuidades en todos los puntos x_n de la sucesión.

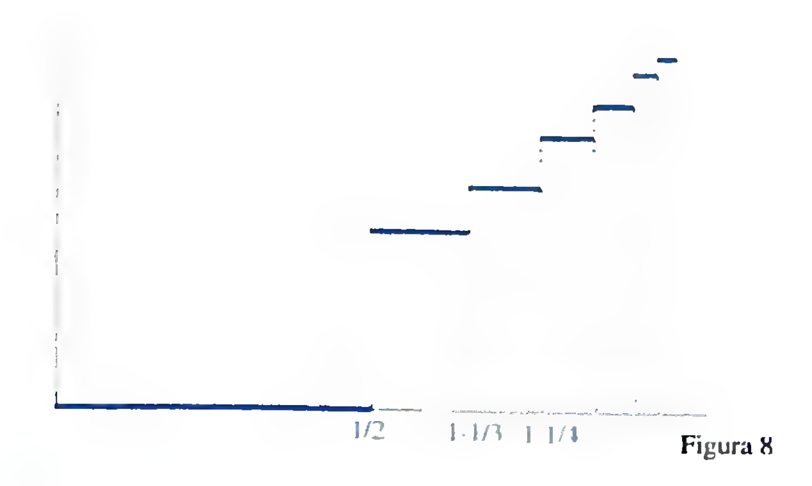


Figura 8

Ejemplo 8

Cálculo efectivo de la integral de la función $f(x) = x$ en el intervalo unidad [0,1].

La función es continua, por tanto es integrable. Para hallar la integral hallamos

$$\sup\{\, s(f,p):\ p \in P([0,1])\,\}.$$

Fijado un número natural n, se considera la partición $p_n = \{ 0 = t_0 < t_1 < ... < 1 = t_n \}$, donde $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0,1,2,...,n$, para la cual

$$S(f,p_n) = \sum_1^n \frac{i}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_1^n \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Al tomar n suficientemente grande $S(f,p_n)$ se aproxima a $\frac{1}{2}$, y como $S(f,p) \geq s(f,q)$ para todo p y todo q, entonces $s(f,p) \leq \frac{1}{2}$. Por tanto

$$L\int_0^1 f \leq \frac{1}{2}.$$

Análogamente calculamos $\inf \{ S(f,p): p \in P([0,1]) \}$ para lo cual disponemos del valor de $s(f, p_n)$ para la partición inicial,

$$s(f,p_n) = \sum_1^n \frac{i-1}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_1^n \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

que de nuevo para n suficientemente grande se aproxima a $\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\frac{1}{2} \leq U\int_0^1 f.$$

Luego,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Observación: El lector observará la dificultad que plantea el cálculo de integrales usando la definición. No se desanime porque faltan las herramientas principales para dicho cálculo, las funciones primitivas y los teoremas fundamentales del Cálculo Integral.

Sección

7-3 Propiedades de la integral

Sea $I=[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado, denotamos por $R(I)$ al conjunto de las funciones integrables en I.

7-3.1 Teorema

1. Propiedad de linealidad. El conjunto $R(I)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ con la suma y el producto por escalares usuales. Además

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

para todo $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ y $f \in R(I)$.

2. Propiedad de monotonía. Si $f,g \in R(I)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. Si $f \in R(I)$, entonces $|f| \in R(I)$. Además, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

4. Si $f,g \in R(I)$, entonces $f \cdot g \in R(I)$.

5. Propiedad de aditividad respecto del intervalo. Sean $c \in [a,b]$. $I_1=[a,c]$ e $I_2=[c,b]$. Entonces $f \in R(I)$ si y sólo si $f \in R(I_1) \cap R(I_2)$

y, en este caso,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Demostración.

1. Se realiza por partes.

Primer paso. Si $f \in R(I)$, entonces $-f \in R(I)$ y $\int_a^b -f = -\int_a^b f$.

Sea la partición $p=\{a=t_0<t_1<\ldots<b=t_n\}$, y

$$m_i=\inf\{f(x): t_{i-1}<x<t_i\} \;;\quad M_i=\sup\{f(x): t_{i-1}<x<t_i\},$$

$$m'_i=\inf\{-f(x): t_{i-1}<x<t_i\} \;;\quad M'_i=\sup\{-f(x): t_{i-1}<x<t_i\},$$

evidentemente, $m'_i = -M_i$ y $M'_i = -m_i$, y en consecuencia

$$-s(f, p) = S(-f, p) \quad y \quad -S(f, p) = s(-f, p).$$

Al considerar ínfimos y supremos se tiene que

$$L\int_a^b (-f) = \sup\{s(-f,p): p\in P(I)\} = -\inf\{S(f,p): p\in P(I)\} = -U\int_a^b f$$

y también,

$$U\int_a^b -f = \inf\{S(-f,p): p\in P(I)\} = -\sup\{s(f,p): p\in P(I)\} = -L\int_a^b f\,.$$

Como $f\in R(I)$, entonces $-f$ es integrable y además

$$\int_a^b -f = U\int_a^b -f = L\int_a^b -f = -L\int_a^b f = -U\int_a^b f = -\int_a^b f \quad .$$

Segundo paso. Si $f\in R(I)$ y $\alpha \geq 0$ entonces $\alpha f\in R(I)$ y $\int_b^b \alpha f = \alpha\int_a^b f$.

Sea la partición $p = \{ a = t_0 < t_1 < \ldots < b = t_n \}$, y

$m_i = \inf \{ f(x): t_{i-1} < x < t_i \}$; $M_i = \sup \{ f(x): t_{i-1} < x < t_i \}$,

$m'_i = \inf \{ \alpha f(x): t_{i-1} < x < t_i \}$; $M'_i = \sup \{ \alpha f(x): t_{i-1} < x < t_i \}$,

evidentemente $m'_i = \alpha m_i$ y $M'_i = \alpha M_i$. Además

$$S(\alpha f,p) = \alpha S(f,p) \quad y \quad s(\alpha f,p) = \alpha s(f,p)\,,$$

luego,

$$L\int_a^b \alpha f = \alpha L\int_a^b f = \alpha U\int_a^b f = U\int_a^b \alpha f\,,$$

por tanto, $\alpha f\in R(I)$ y $\int_a^b \alpha f = \alpha\int_a^b f$.

Tercer paso. Si $f\in R(I)$ y $\alpha\in \mathbf{R}$, entonces $\alpha f\in R(I)$.

Basta combinar los pasos primero y segundo.

Cuarto paso. Sean $f, g \in R(I)$, entonces $f+g \in R(I)$ y $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Al ser f y g integrables existen dos particiones p_1 y p_2 tales que

$$S(f,p_1) - s(f,p_1) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(g,p_2) - s(g,p_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se considera $p = p_1 \cup p_2 = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < b = t_n\}$, la partición resultante de unir y reordenar las dos particiones y denotamos por

$$M_i = \sup\{f(x)+g(x): t_{i-1} < x < t_i\}; \quad m_i = \inf\{f(x)+g(x): t_{i-1} < x < t_i\},$$

$$M'_i = \sup\{f(x): t_{i-1} < x < t_i\} \quad ; \quad m'_i = \inf\{f(x): t_{i-1} < x < t_i\},$$

$$M''_i = \sup\{g(x): t_{i-1} < x < t_i\} \quad ; \quad m''_i = \inf\{g(x): t_{i-1} < x < t_i\}.$$

Obviamente, $M_i \leq M'_i + M''_i$ y $m_i \geq m'_i + m''_i$, por tanto,

$$S(f+g,p) - s(f+g,p) \leq S(f,p) - s(f,p) + S(g,p) - s(g,p) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y por el Teorema 7-3.1 tenemos que $f+g \in R(I)$.

Para ver la aditividad de la integral, utilizamos la partición p,

$$S(f,p) \leq \frac{\varepsilon}{2} + s(f,p) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f \quad ; \quad S(g,p) \leq \frac{\varepsilon}{2} + s(g,p) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g,$$

$$s(f,p) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + S(f,p) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f \quad ; \quad s(g,p) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + S(g,p) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g,$$

y con estas desigualdades se establece

$$\int_a^b (g+f) \leq S(f+g,p) \leq S(f,p) + S(g,p) \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon,$$

$$\int_a^b (g+f) \geq s(f+g,p) \geq s(f,p) + s(g,p) \geq \int_a^b f + \int_a^b g - \varepsilon,$$

de donde,

$$-\varepsilon \leq \int_a^b (g+f) - \int_a^b f - \int_a^b g \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } \varepsilon \geq 0.$$

Luego, $\int_a^b (g+f) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

2. Sean la partición $p = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < b = t_n\}$,

$$m_i = \inf\{f(x): t_{i-1} < x < t_i\} \quad \text{y} \quad m'_i = \inf\{g(x): t_{i-1} < x < t_i\}.$$

Se observa que $m'_i \geq m_i$, de donde, $s(g,p) \geq s(f,p)$, y esto es cierto

para toda partición p.

Luego, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

3. Sean la partición $p = \{a = t_0 < t_1 < ... < b = t_n\}$ y

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} < x < t_i\} \quad ; \quad M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} < x < t_i\},$$
$$m'_i = \inf\{|f(x)| : t_{i-1} < x < t_i\} \quad ; \quad M'_i = \sup\{|f(x)| : t_{i-1} < x < t_i\}.$$

Se observa inicialmente la desigualdad $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$.

Al aplicar que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, se obtiene

$\sup\{-|f(x)| : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = -\inf\{|f(x)| : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \leq \sup\{|f(x)| : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$,

luego, $-m'_i \leq M_i$.

Análogamente, se obtiene que $m_i \leq m'_i$.

Si $x \in [t_{i-1}, t_i]$ y $f(x) \geq 0$ se tiene que

$$|f(x)| = f(x) \leq M_i + m'_i - m_i$$

y si $f(x) \leq 0$ entonces

$$|f(x)| = -f(x) \leq -m_i + M_i + m'_i.$$

En consecuencia

$$|f(x)| \leq M_i + m'_i - m_i$$

y al tomar supremos se tiene la desigualdad requerida.

A continuación demostramos 3. Como f es integrable, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición p tal que $S(f,p) - s(f,p) \leq \varepsilon$, luego

$$S(|f|,p) - s(|f|,p) \leq S(f,p) - s(f,p) \leq \varepsilon$$

lo que prueba que $|f| \in R(I)$.

La desigualdad de las integrales se obtiene de aplicar la propiedad 2.

4. Se hace en tres pasos.

Primer paso. Se comprueba el caso particular en el cual $f = g \geq 0$.

Sean M_i y m_i los valores supremo e ínfimo de la función f, y M'_i y m'_i los correspondientes para la función f^2 para una partición cualquiera.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $p \in P(I)$ tal que $S(f,p) - s(f,p) \leq \dfrac{\varepsilon}{2k}$, donde k es una cota superior de $|f|$. Entonces,

$$S(f^2,p) - s(f^2,p) =$$

$$= \sum_{1}^{n} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{1}^{n} (M^2_i - m^2_i)(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{1}^{n} (M_i - m_i)(M_i + m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\leq 2k \sum_{1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = 2k\,(S(f,p) - s(f,p)) \leq \varepsilon.$$

Luego, la función f^2 es integrable.

Segundo paso. Si $f = g$ es una función integrable cualquiera (no necesariamente no negativa) se descompone f en su parte positiva y en su parte negativa, es decir,

$$f = f^+ - f^-$$

con $f^- = \dfrac{(-f)(t) + |f(t)|}{2}$ y $f^+(t) = \dfrac{f(t) + |f(t)|}{2}$.

Ambas funciones son integrables y positivas, por tanto, la función $f^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2$ es integrable.

Tercer paso. Al aplicar la igualdad

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right),$$

y como cada sumando de la derecha es una función integrable se deduce que $f \cdot g$ es una función integrable.

5. Si $f \in R(I)$, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $q = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < b = t_n\}$ tal que

$$S(f,q) - s(f,q) \leq \varepsilon,$$

además, para la partición $p = q \cup \{c\}$ se cumple igualmente que

$$S(f,p) - s(f,p) \leq S(f,q) - s(f,p) \leq S(f,q) - s(f,q) \leq \varepsilon$$

Al considerar la descomposición de la partición p

$$p_1 = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < c\} \quad \text{y} \quad p_2 = \{c = t_i < t_{i+1} < \ldots < b = t_n\},$$

donde p_1 es partición de I_1 y p_2 es partición de I_2 se tiene que

$$S(f,p) = S(f,p_1) + S(f,p_2) \quad \text{y} \quad s(f,p) = s(f,p_1) + s(f,p_2).$$

Al restar ambas igualdades se obtiene

$$(S(f,p_1) - s(f,p_1)) + (S(f,p_2) - s(f,p_2)) = S(f,p) - s(f,p) \leq \varepsilon,$$

por tanto, cada uno de los sumandos del primer miembro son menores que ε. Así pues, f es integrable en I_1 y en I_2. Además de

$$s(f,p_1) \leq \int_a^c f \leq S(f,p_1) \qquad \text{y} \qquad s(f,p_2) \leq \int_c^b f \leq S(f,p_2),$$

resulta que
$$s(f,p) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq S(f,p),$$

y también,
$$s(f,p) \leq \int_a^b f \leq S(f,p).$$

De todo esto se deduce que $0 \leq \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \leq 0$, lo cual implica que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Observación: Estas propiedades básicas de la integral son fundamentales en el cálculo integral.

- La primera propiedad asegura en términos algebraicos que $R(I)$ es un espacio vectorial y que la integral es un homomorfismo de $R(I)$ en **R**. Esto permite reducir algunas integrales a otras más sencillas mediante descomposición en sumas y producto por escalares.

- Una expresión escrita como $\int_s^r f$ donde $s > r$ no tiene sentido integral, esta no es más que un **convenio notacional** para expresar el número $-\int_r^s f$, es decir, si $s > r$ y $f \in R([r,s])$, denotamos

$$\int_s^r f(x)\,dx = -\int_r^s f(x)\,dx.$$

- La propiedad 2, de **Monotonía**, intuitivamente expresa que si la función f es menor que la función g, el área delimitada por la gráfica de g es mayor que la delimitada por la gráfica de f, para funciones positivas.

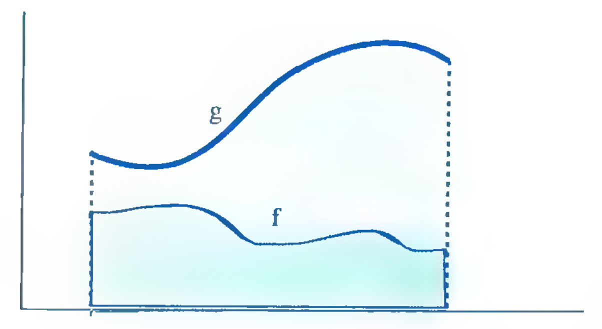


Figura 10
Area por debajo de g > área por debajo de f

- La propiedad 5 nos permite descomponer I en un número finito de subintervalos y hallar las integrales sobre cada subintervalo. Este es el sistema utilizado para integrar funciones definidas a trozos. La demostración de estas propiedades es larga pero permite ver la bondad de la definición de la integral.

Aunque el Teorema 7-3.1 permite simplificar mucho el cálculo de integrales, el instrumento fundamental, el cálculo de funciones primitivas, no se introduce hasta más adelante. Veamos un ejemplo de simplificación de una integral mediante estas propiedades básicas.

Ejemplo 9.

La función $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\le x<\frac{1}{3} \\ 2 & \text{si} \quad \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3} \\ 3 & \text{si} \quad \frac{2}{3}\le x<1 \end{cases}$$

es integrable en $[0,1]$ y su integral es

$$\int_a^b f = \int_0^{\frac{1}{3}} 1 + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2 + \int_{\frac{2}{3}}^{1} 3 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2 .$$

Obsérvese la gráfica de la función.

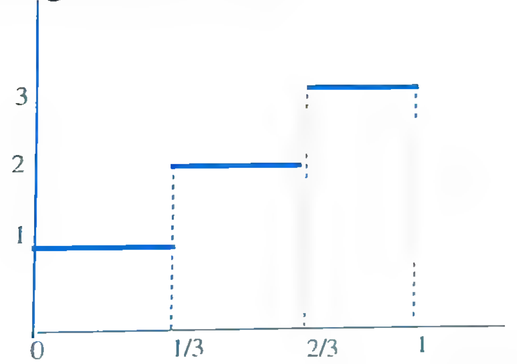


Figura 9

Ejemplo 10.

En general se tiene que $\int_a^b fg \neq \int_a^b f \cdot \int_a^b g$, es decir, **no es cierto** que la integral de un producto de funciones sea el producto de las integrales de las funciones. Para probar esto se propone el siguiente contraejemplo.

Sean las funciones

$$f(x) = 1 \text{ en } [0,1] \quad \text{y} \quad f(x) = 0 \text{ en } [1,2],$$

y

$$g(x) = 0 \text{ en } [0,1] \quad \text{y} \quad g(x) = 1 \text{ en } [1,2].$$

Por el Corolario 7-2.3, tanto f como g son integrables en $[0,2]$.

Si se utiliza la partición $p = \{0 = t_0 < 1 = t_1 < 2 = t_2\}$, se comprueba que

$$\int_0^2 f = 1 \ , \ \int_0^2 g = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^2 fg = 0 .$$

Problema Propuestos

1) Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, probar que $\int_a^b f \geq 0$.

2) Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función constante con valor k para todo $t \in [a,b]$. Demostrar que $\int_a^b f = k(b-a)$.

3) Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq c \\ r & \text{si} \quad x = c \end{cases}$

con $c \in [a,b]$ y $r \neq 0$. Probar que f es integrable y que $\int_a^b f = 0$.

4) Sean $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función integrable y $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ otra función tal que $f(x) = g(x)$ salvo en $x = c$. Probar que g es integrable y que $\int_a^b f = \int_a^b g$.

5) Calcular $\int_0^2 [x^2]\, dx$, donde $[z]$ representa la parte entera de z, es decir, el mayor entero menor o igual que z.

6) Calcular $\int_0^3 f(x)\, dx$ donde $f(x) = x$, utilizando la definición de integral.

7) Calcúlese mediante la definición la integral $\int_0^b e^t dt$.

8) Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua. Probar que si $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$, entonces se tiene que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Capítulo 8

Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral

El Cálculo Diferencial, se inició con el estudio del "problema de las tangentes", es decir, la determinación de las rectas tangentes a una curva dada, y el Cálculo Integral, con el "problema de las cuadraturas", es decir, determinar el área encerrada por una curva dada. Estas son las dos partes fundamentales del Cálculo Infinitesimal.

El gran mérito compartido por Isaac Newton (1642-1728) y Gottfried Leibnitz (1646-1716), consiste en haber reconocido claramente la íntima conexión entre ambos problemas, cosa que, en principio, no parecía haber razón para pensar. De esta manera a estos grandes pioneros de la Ciencia se les atribuye, usualmente, el descubrimiento y desarrollo sistemático del Cálculo.

La relación se establece en un teorema, que estudiaremos en este capítulo, llamado el "Teorema Fundamental del Cálculo". En esencia, este teorema explica que la derivación y la integración (indefinida) son operaciones inversas, en forma parecida a como lo son la multiplicación y la división.

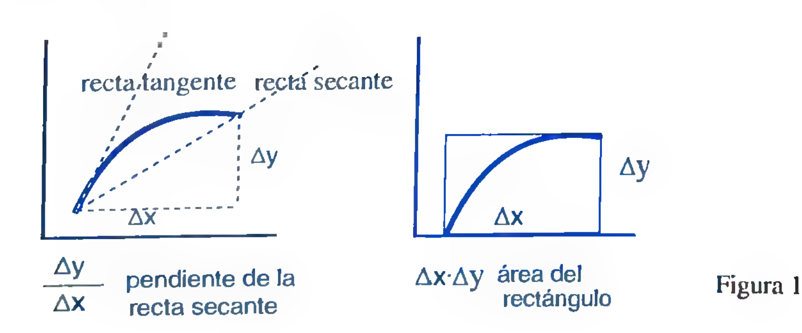


Figura 1

En la primera de las gráficas de la Figura 1 utilizamos la pendiente de una recta secante, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para aproximar la pendiente de la recta tangente. Análogamente, en la segunda gráfica usamos el área de un rectángulo, $\Delta y \cdot \Delta x$, para aproximar el área limitada por la curva, el eje OX y una recta paralela al eje OY.

Por lo tanto, al menos en esta etapa de aproximación inicial, las dos operaciones parecen ser inversas, y, aunque no es realmente cierto que la integración sea la operación inversa de la derivación, en muchos casos se puede aceptar como una formulación imprecisa de una proposición verdadera que, por otra parte, es una de las propiedades fundamentales del Cálculo.

Precisar las condiciones en las que tiene sentido y se verifica esta propiedad de inversión es el objeto principal de este capítulo.

La primera sección empieza con el concepto de integral indefinida $F(x)$ de una función y sigue con el denominado Primer Teorema Fundamental del Cálculo, que expresa la existencia de la derivada de la integral indefinida de la función $f(x)$, $F'(x)$, en aquellos puntos en los que f es continua y muestra la igualdad $F'(x) = f(x)$.

En cada uno de los puntos en que f no es continua se puede presentar una de las tres situaciones siguientes:

- no existe F',
- existe F' y no coincide con f,
- existe F' y coincide con f.

El hecho de que no se pueda asegurar la derivabilidad de la integral indefinida de una función integrable f en $[a,b]$, induce a considerar la posible existencia de funciones F que sean derivables y tales que :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Estas funciones son las llamadas funciones primitivas de la función f y si existen están determinadas salvo una constante.

Esta dificultad esencial referente a la existencia de la primitiva no impide establecer el segundo teorema fundamental del cálculo para las funciones acotadas: si f es una función integrable en $[a,b]$ y f es la derivada de otra función F entonces la integral de f en $[a,b]$ es igual a $F(b) - F(a)$.

Sección

8-1

Integral indefinida. Primer teorema fundamental del Cálculo

Un paso decisivo en el estudio de las integrales de funciones se consigue al introducir el concepto de integral indefinida.

Dada una función $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ no negativa e integrable, su integral mide el área del conjunto de ordenadas limitado por el eje OX, el grafo de f y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Fijo el intervalo [a,b] el valor de la integral es un número. Sin embargo, si se considera fijo el extremo a y variable el b del intervalo [a,b] sobre el que se efectúa la integración, el área será una función del extremo b. Precisamente esta función, prescindiendo del carácter positivo de f, y del aspecto geométrico de la integral, es la llamada integral indefinida de f.

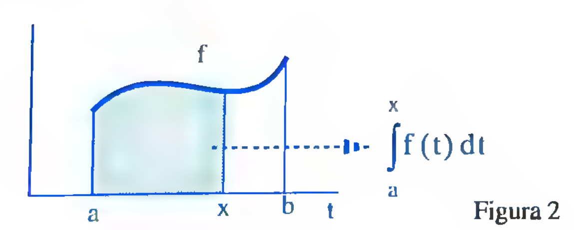


Figura 2

8-1.1 Definición

Sea f una función $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, integrable en [a,b], llamamos **integral indefinida** de f, a la función $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f \ , \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

La función F tiene propiedades notables, ya que es continua en [a,b] para toda función integrable, y es derivable en los puntos $x \in [a,b]$ para algunas funciones f.

8-1.2 Proposición

Sea f una función integrable en [a,b]. La función F definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in [a,b]$, es continua en [a,b].

Demostración

Al ser f acotada en [a,b], existe $K > 0$ tal que es $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$.

Si $x \in [a,b)$ y $h \in \mathbf{R}$ con $0 < h < b-x$, al aplicar el Teorema 7-3.1 se tiene

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \leq \int_x^{x+h} K\,dt \leq Kh.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{h \to 0} [F(x+h) - F(x)] = 0,$$

luego, F es continua por la derecha en $x \in [a,b)$.

De la misma forma se demuestra que F es continua por la izquierda en todo punto de (a,b].

El próximo resultado es sin duda el resultado más importante de este capítulo y, como su propio nombre indica, uno de los puntos más culminantes de la teoría de funciones reales de variable real.

La idea que en él se maneja consiste en analizar la dependencia de la integral de una función con respecto al intervalo de integración.

8-1.3 Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es una función integrable en [a,b], y continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces la integral indefinida,

$$F : [a,b] \to \mathbf{R} \text{ donde } F(x) = \int_a^x f \quad \text{para todo } x \in [a,b],$$

es derivable en x_0 y, además, $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demostración

Para simplificar la demostración, sin pérdida de generalidad, se supondrá que x_0 es un punto interior del intervalo [a,b].

Por ser f continua en x_0 se verifica que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Además, suponemos que δ es suficientemente pequeño para que el entorno $N(x_0,\delta)$ esté contenido en el intervalo [a,b].

Por otra parte, para todo $x \in [a,b]$ con $x \neq x_0$ se tiene:

Si $x > x_0$, entonces $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$

Si $x_0 > x$, entonces $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = -\int_x^{x_0} f(t)\,dt.$

De cualquier forma,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x (f(t))\,dt - f(x_0)\,(x - x_0)\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x dt\right| = \frac{\varepsilon}{|x - x_0|}|x - x_0| = \varepsilon.$$

Por consiguiente, $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Observación: El Primer Teorema Fundamental del Cálculo puede interpretarse de manera intuitiva diciendo que la integral " depende de manera continua " del intervalo de integración.

Intuición aparte, este teorema pone al descubierto el principal interés que tiene la integración: El ser una potente herramienta para la construcción de funciones continuas ya que como hemos visto, la integral de una función integrable entre un punto fijo y otro variable da lugar a una función que es continua, e incluso, derivable en los puntos donde la función inicial es continua.

La afirmación final del teorema, probablemente la más importante, nos da un resultado varias veces prometido: Toda función continua en un intervalo es la función derivada de otra, concretamente de cualquiera de sus integrales indefinidas.

Ejemplo 1

Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt}$$

aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Como la función $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es una función continua en **R**, entonces

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

es una función derivable por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo. En estas condiciones se puede aplicar la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1/(1+x^2)} = 1.$$

Ejemplo 2

La función $F(x) = \int_0^{x+1} t^3\,dt$ es una función derivable puesto que se puede expresar como composición de dos funciones derivables, puesto que si $F_2(x) = \int_0^x t^3\,dt$ y $F_1(x) = x + 1$, entonces, $F(x) = F_2 \circ F_1(x)$.

F_2 es una función derivable debido a que $g(x) = x^3$ es una función continua en todo **R**. Además, $F'(x)$ se determina aplicando la regla de la cadena

$$F'(x) = F_2'(F_1(x)) \cdot F_1'(x),$$

y como por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo

$$F_2'(x) = x^3,$$

se tiene que

$$F'(x) = (x+1)^3 \cdot 1 = (x+1)^3.$$

Ejemplo 3

La función $F(x) = \int_{x^2}^{x^5} \operatorname{sen} t^2 dt$ es derivable.

Si $F_1(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$, $F_2(x) = x^5$ y $F_3(x) = x^2$, entonces

$$F(x) = F_1 \circ F_2(x) - F_1 \circ F_3(x).$$

Se halla $F'(x)$ aplicando las reglas de derivación

$$F'(x) = F_1'(F_2(x)) \cdot F_2'(x) - F_1'(F_3(x)) \cdot F_3'(x),$$

luego,

$$F'(x) = 5x^4 \cdot \operatorname{sen} x^{10} - 2x \cdot \operatorname{sen} x^4.$$

Sección

8-2

Primitivas de una función. Segundo teorema fundamental del cálculo

Dedicamos este sección a obtener un método práctico de gran utilidad para el cálculo de integrales.

Muchas aplicaciones importantes del Cálculo están relacionadas con el problema de determinar una función f conocida su función derivada f´. Por ejemplo, suponga el lector que se le pide encontrar una función F(x) cuya derivada sea la función:

$$f(x) = 4x^3.$$

Seguramente, con su conocimiento de las derivadas de las funciones elementales, contestaría que la función pedida es

$$F(x) = x^4$$

ya que $$F'(x) = (x^4)' = 4x^3 = f(x).$$

Usualmente, de la función F(x) se dice que es una función primitiva o antiderivada de la función f(x).

8-2.1 Definición

Diremos que una función $f : I \to \mathbf{R}$, siendo $I = [a,b]$, admite una primitiva cuando exista una función $F : I \to \mathbf{R}$ continua en I, derivable en $int(I) = (a,b)$ y tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in int(I)$.

Ejemplo 4

La función $F(x) = \cos x$, es una función primitiva de $f(x) = \text{sen } x$, pues $F'(x) = \text{sen } x = f(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Ejemplo 5

Las funciones $F_1(x) = e^x - 1$ y $F_2(x) = e^x + 3$ son funciones primitivas de la función $f(x) = e^x$.

Observación: Se puede apreciar en el último ejemplo que una función puede tener varias funciones primitivas ya que la derivada de toda función constante es la función nula. Esto sugiere que para cualquier $K\in \mathbf{R}$, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces la función $F(x) + K$ también lo es.

Este resultado forma parte de la siguiente proposición que caracteriza todas las primitivas de una función: Para las primitivas de funciones definidas en un intervalo se verifica una propiedad de unicidad salvo una constante.

8-2.2 Proposición

Sean un intervalo $I = [a,b]$ y $f : I \to \mathbf{R}$ una función continua en I. Si F_1 y F_2 son dos funciones primitivas de f en I, entonces la función

$F_1 - F_2$ es una función constante en I.

Demostración

En cualquier punto interior del intervalo I se tiene:

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

y por tanto, $F_1 - F_2$ es constante.

En consecuencia, si F es una primitiva de f en el intervalo I, entonces cualquier otra primitiva de f en I es de la forma $F + K$, donde $K\in \mathbf{R}$ es una constante cualquiera.

Observación: El punto crucial de la proposición anterior está en que podemos representar toda la familia de primitivas de una función mediante la adición de una constante y una primitiva conocida. Entonces, la solución general de la ecuación $y' = f(x)$ se simboliza por

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + k$$

donde se llama a x variable de integración, a $f(x)$ integrando y a K constante de integración. Leemos el símbolo $\int f(x)\,dx$ como la primitiva general de f con respecto a x.

8-2.3 Notación integral para las funciones primitivas

Con la notación tradicionalmente usada, la de Leibnitz, el conjunto de las primitivas de una función continua f, se simboliza por $\int f(x)$ o por $\int f(x)\,dx$ y se escribe:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K.$$

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede ser vista por el hecho de que mediante la sustitución de $F'(x)$ por $f(x)$ en esta definición, se obtiene $\int F'(x)\,dx = F(x) + K$,

y, por otro lado, $[\int f(x)\,dx]' = [F(x) + K]' = F'(x) = f(x)$.

La peculiaridad de ser operaciones inversas, según estas dos últimas igualdades, nos permite encontrar fórmulas de integración a partir de las de derivación como veremos en el capítulo siguiente.

Por otra parte, no todas las funciones tienen funciones primitivas, y es difícil dar condiciones suficientes, bastantes generales, para que una función $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ tenga primitiva. En el caso de asegurar la continuidad de f, el Primer Teorema Fundamental del Cálculo asegura la existencia de función primitiva.

8-2.4 Proposición

Toda función $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ continua en un intervalo compacto I, tiene primitiva en I. Una primitiva de f es la integral indefinida

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{para todo } x \in I, \text{ con } a \in I.$$

Observación: No se debe confundir las expresiones $\int f(x)\,dx$ e $\int_a^b f(x)\,dx$. La primera designa el conjunto de las funciones primitivas de f y la segunda a la integral de f en el intervalo $[a,b]$, y por tanto, es un número real que también escribiremos como $\int_a^b f(x)\,dx$. Suele llamarse **integral indefinida** a la primera e **integral definida** a la segunda.

8-2.5 Proposición

Sean $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ dos funciones continuas y α, β dos números reales, no ambos nulos, entonces

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx .$$

Demostración

Sean F y G dos funciones primitivas de f y g, respectivamente, en I. Entonces:

$$(\alpha F+\beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

Luego, $\alpha F+\beta G$ es una función primitiva de $\alpha f+\beta g$.

Ejemplo 6

Como la función $F(x) = \text{Ln } x$ es una función primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ en [a,b] contenido en $\mathbf{R}^+$, entonces $G(x) = -\frac{2}{3}\text{Ln } x$, o $G(x) = \text{Ln}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, es una función primitiva de $g(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ en [a,b].

Ejemplo 7

Como $F_1(x) = e^x$ es una función primitiva de la función $f_1(x) = e^x$ y $F_2(x) = x^4$ de $f_2(x) = 4x^3$, entonces una función primitiva de la función $f_3(x) = -\frac{1}{2} f_1(x) + f_2(x)$ es la función $F_3(x) = -\frac{1}{2}e^x + x^4$.

Observación: Los conceptos de integral indefinida en un intervalo I de una función f, y función primitiva en I de la función f son distintos. Para el primer concepto la función debe ser integrable y no así en el segundo concepto.

Al imponer la continuidad de f, entonces su integral indefinida en I y sus funciones primitivas se identifican salvo constantes.

Estudiaremos ahora otro caso en el que también hay identificación, salvo constantes, y no se exige la continuidad de f.

8-2.6 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo o regla de Barrow.

Sea $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una función integrable que admite una función primitiva F. Entonces $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$, para todo $x \in [a,b]$.

Demostración

Sean $c \in [a,b]$ y $p = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = c \}$ cualquier partición del intervalo [a,c].

Para cada $k \in \{1,2,\dots,n\}$ podemos aplicar el Teorema de los Incrementos Finitos a la restricción de F al intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ obteniendo un punto $\zeta_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\zeta_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = f(\zeta_k)\cdot(x_k - x_{k-1}).$$

Se tiene, pues,

$$F(c) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) =$$
$$= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) =$$
$$= f(\zeta_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) + \dots + f(\zeta_1)\cdot(x_1 - x_0),$$

lo que demuestra que $F(c) - F(a)$ es una suma integral de f respecto de la partición p, es decir,

$$s(f,p) \le F(c) - F(a) \le S(f,p).$$

Como esto es válido para cualquier partición p de $[a,b]$, deducimos que

$$L\int_a^c f \le F(c) - F(a) \le U\int_a^c f.$$

Finalmente, por ser f integrable en $[a,c]$ y llamar x a c tenemos que

$$L\int_a^c f = F(c) - F(a) = U\int_a^c f,$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Este teorema proporciona una regla práctica, la **regla de Barrow**, para el cálculo efectivo de integrales:

Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es integrable y F es una primitiva cualquiera de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Al emplear la notación $F(b) - F(a) = F(x)\,\big|_a^b$ o $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$, se escribe $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b = F(x)\,\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

La fórmula anterior es la usada de ordinario para el cálculo de integrales, que se reduce, así, al cálculo de funciones primitivas.

Ejemplo 8

Al aplicar la regla de Barrow, el cálculo de la integral $\int_0^a \operatorname{sen} x \, dx$ es inmediato. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua y $F(x) = -\cos x$ es una primitiva de f, luego

$$\int_0^a \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^a = -\cos a + \cos 0 = 1 - \cos a.$$

Ejemplo 9

Para hallar $\int_0^4 \sqrt[n]{2x}\,dx$ buscamos una función primitiva de la función

$$f(x) = \sqrt[n]{2x}.$$

En la tabla de derivadas de funciones elementales de la Sección 5.5 tenemos que la derivada de la función potencial, en este caso,

$$g(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}} \quad \text{es} \quad g'(x) = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} = \frac{1}{k} x^{\frac{1-k}{k}},$$

así pues, la derivada de

$$g(2x) = \sqrt[k]{2x} \quad \text{es} \quad g'(2x) = 2\frac{1}{k}(2x)^{\frac{1-k}{k}}.$$

Para que una función del tipo de $\alpha \cdot g(2x)$ posea una derivada como f(x) tendremos que identificar coeficientes y exponentes, es decir, de

$$\alpha \cdot g'(2x) = f(x)$$

se obtiene $\frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$ y

$$\alpha \cdot 2 \cdot \frac{1}{k} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{k}{2} = \frac{\frac{n}{n+1}}{2} = \frac{1}{2\frac{n+1}{n}}.$$

Así pues, consideramos la función

$$F(x) = \frac{(2x)^{\frac{1}{n}+1}}{2\frac{n+1}{n}}.$$

Como se verifica que $F'(x) = \sqrt[n]{2x}$, resulta que F es una función primitiva de la función $f(x)$. Al aplicar la regla de Barrow se tiene que

$$\int_0^4 \sqrt[n]{2x}\,dx = \frac{n}{2(n+1)}8^{\frac{n+1}{n}}.$$

Ejemplo 10

Para hallar el área del conjunto

$$M = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x^2 \}$$

procedemos al cálculo de una integral definida ya que

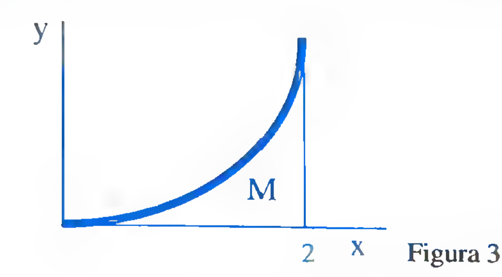


Figura 3

$$\text{Area de } M = \int_0^2 2x^2 dx.$$

Como $G(x) = \frac{2}{3}x^3$ es una función primitiva de $f(x) = 2x^2$ (esto se observa procediendo como en el Ejemplo 8, al aplicar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\int_0^2 2x^2 dx = G(2) - G(0) = \frac{16}{3}.$$

Sección

8-3

Teoremas del valor medio para integrales

Aunque las integrales se presentan en muchas ocasiones, son pocos los casos en que el valor de la integral se puede hallar de manera explícita. No obstante, a veces es bastante con obtener una estimación de la integral. Los teoremas del valor medio para integrales que veremos en esta sección son de gran utilidad para disponer de dichas estimaciones.

Conviene recordar que para aproximar el área de una región limitada por una curva en el capítulo siete se utilizaban rectángulos. El área real de la región era menor que el área de un rectángulo circunscrito y mayor que el área de un rectángulo inscrito. El teorema del valor medio para integrales asegura que entre esos dos rectángulos, inscrito y circunscrito, existe otro tercer rectángulo cuya área es precisamente el área buscada, como podemos apreciar en la siguiente figura.

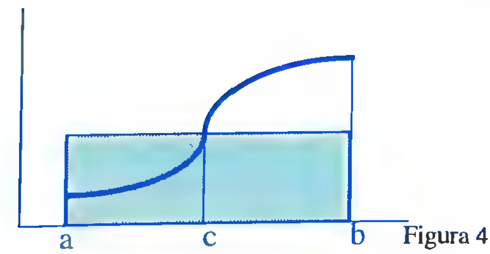


Figura 4

8-3.1 Definición

Sea f una función integrable en [a,b]. Se llama **valor medio** o promedio de dicha función en ese intervalo al siguiente número real

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Este valor promedio que evidentemente existe, puede ser alcanzado o no por la función. Cuando la función es continua lo hace, como veremos en el siguiente teorema.

8-3.2 Primer teorema del valor medio para integrales.

Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx .$$

Demostración

Al ser f continua en el compacto $[a,b]$, ésta posee máximo y mínimo absoluto por el Teorema 4-2.3 de Weierstrass. Denotamos por $f(m)$ y $f(M)$ los valores mínimo y máximo absolutos alcanzados por la función f en $[a,b]$, es decir,

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M) \quad \text{para todo } x \in [a,b]$$

y, por tanto,

$$\int_a^b f(m)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(M)\,dx .$$

Esta desigualdad se comprueba gráficamente en la siguiente figura.

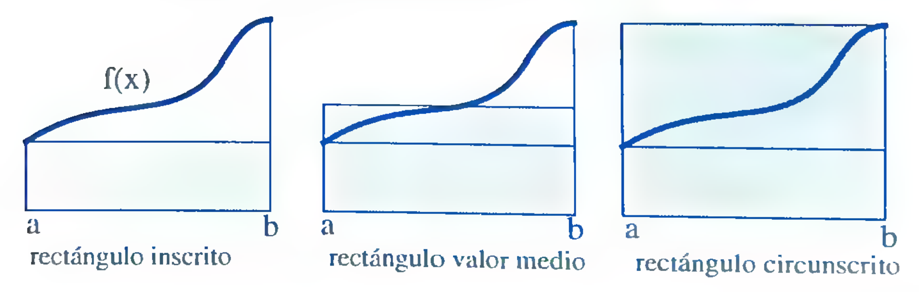


Figura 5

Como $\int_a^b f(m) = f(m) \cdot (b-a)$ y $\int_a^b f(M) = f(M) \cdot (b-a)$, se deduce que

$$f(m) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(M) \cdot (b-a) .$$

Al dividir la anterior desigualdad por $b-a$ se tiene:

$$f(m) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq f(M) .$$

El Teorema 4-2.5 de los valores intermedios asegura que toda función continua definida sobre un intervalo compacto toma cualquier valor comprendido entre su mínimo y su máximo absolutos. Así pues, existe algún c en $[a,b]$ tal que en él la función alcanza el valor

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a},$$

es decir, $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$

Observación: Nótese que el teorema del valor medio para integrales es un teorema de existencia y no precisa la forma de hallar el punto c.

En la Figura 6 se muestra una interpretación geométrica del anterior teorema, y se puede apreciar que $f(c)$ es la media aritmética de los valores que toma $f(x)$ en $[a,b]$.

Las regiones cerradas rotuladas con A y B tienen el mismo área, es decir, el área de la región comprendida entre la recta $y = f(c)$ y la gráfica de la función f en $[a,c]$ es el mismo que el de la región comprendida entre la gráfica de la función f y la recta $y = f(c)$ en $[c,b]$.

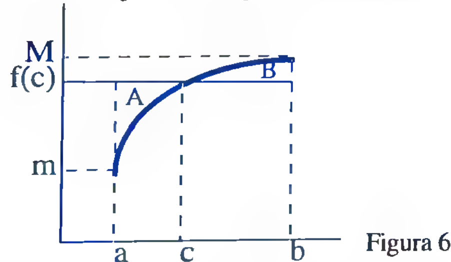


Figura 6

Este teorema asegura que si f es continua entonces siempre se puede encontrar una recta paralela el eje OX tal que el área de la región entre la recta y la gráfica de la función por encima de la recta es la misma que la de la región comprendida entre la gráfica de la función y dicha recta por debajo de dicha recta.

8-3.3 Definición

Sean f y g dos funciones integrables en $[a,b]$ tales que f es no negativa y g es positiva. Se llama **valor medio** de la función f **ponderado** por la función g en $[a,b]$ al siguiente número real

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

El teorema del valor medio ponderado (segundo teorema del valor medio integral) asegura que en el caso de ser f continua, el valor medio de f ponderado por g es uno de los valores que alcanza f en $[a,b]$.

8-3.4 Segundo teorema del valor medio para integrales

Sean $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y $g(x)$ una función acotada, integrable y de signo constante en $[a,b]$ que no se anula en $[a,b]$, entonces existe algún punto $c \in [a,b]$, tal que:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

Demostración:

Supongamos primero que g es positiva, $g(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Al ser f continua en $[a,b]$, tenemos que f alcanza un máximo y un mínimo en $[a,b]$ por el teorema de Weierstrass. Sean $f(m)$ y $f(M)$ el valor mínimo y el valor máximo de f en $[a,b]$, es decir,

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M) \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Por ser g no negativa, entonces

$$f(m) \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq f(M) \cdot g(x) \quad \text{para todo } x \in [a,b],$$

y por la monotonía de la integral

$$f(m)\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq f(M)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Al dividir la última desigualdad por $\int_a^b g(x)\,dx$ que es un número positivo se tienen las desigualdades

$$f(m) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq f(M).$$

El Teorema de los valores intermedios nos asegura que el valor

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

es alcanzado por la función en un punto de $[a,b]$, es decir, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

En el caso de ser g negativa, $g(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$, se procede

con un desarrollo análogo.

Ejemplo 11

Al desconocer una función primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^3}$, entonces la integral definida $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^3}\,dx$ no puede ser calculada por la regla de Barrow.

Para determinar una aproximación de $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^3}\,dx$ utilizamos el primer Teorema del valor medio para integrales.

Al ser la función f monótona decreciente en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ vamos a tomar como c el punto medio de dicho intervalo, es decir $c = \frac{1}{4}$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^3}\,dx = f(c) \cdot (b - a) \cong \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3} \cdot \frac{1}{2} \cong 0.49856 .$$

Ejemplo 12

Calcular el valor aproximado de la integral $\int_1^3 \frac{e^x}{x}\,dx$ (esta integral surgió en la construcción del Canal de la Mancha).

Como todavía no se ha logrado hallar una función primitiva de la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, usaremos el segundo Teorema del valor medio para integrales.

Se consideran $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, que son funciones que cumplen las hipótesis del citado teorema. Así pues, existe un $c \in [1,3]$ tal que

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x}\,dx = \int_1^3 f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_1^3 g(x)\,dx.$$

Si se considera que $c = 2$, entonces

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x}dx \cong e^2\int_1^3 \frac{1}{x}dx = e^2(\text{Ln}3 - \text{Ln}1) = e^2\text{Ln}3.$$

Problemas Propuestos

1) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt.$ b) $g(x) = \int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt.$

2) Calcular $F'(x)$ supuesto que $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$ y f es una función continua en **R**.

3) Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x (t^3+t^2)\,dt}{x^4}.$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4}.$

4) Calcúlese el área del conjunto comprendido entre las gráficas de las funciones $f(x) = x - x^3$ y $g(x) = 0.$

5) Evaluar $I = \int_{-1}^{1} |3x+1|\,dx.$

6) Calcular un valor aproximado del área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \frac{1}{\text{Ln}x}$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4.$

7) Hallar el área menor limitada por el circunferencia $x^2+y^2 = 16$ y la recta $x = 2.$

8) La velocidad v del flujo de sangre a una distancia d del centro de una vena de radio R puede ser aproximada por la ecuación

$$v = C(R^2 - d^2)$$

donde C es una constante. Calcular la velocidad promedio del flujo de sangre a lo largo de un radio de la vena.

Capítulo 9

Cálculo de Primitivas

La primera publicación que establece la relación entre integral y derivada se debe a Isaac Barrow (1630-1677) que la estudió para algunos casos especiales. Fué realmente Newton, su discípulo predilecto, quien propició el abandono definitivo de los antiguos métodos particulares de integración en favor del método por el cual la integración es considerada como la operación inversa de la derivación.

Esta idea fundamental es en la que nos basamos para estudiar el cálculo de primitivas. Los métodos que se exponen en este capítulo se refieren exclusivamente a funciones continuas definidas en intervalos y no son de tipo teórico sino de índole esencialmente práctico.

En esencia se basan en tres reglas que se denominan:

- Integración por descomposición; basado en la técnica algebraica de descomposición en fracciones racionales simples.

- Integración por partes; basado en la fórmula de derivación de un producto.

- Integración por cambio de variable; basado en la regla de la cadena.

Frecuentemente ninguna de las tres reglas permite calcular directamente una integral, sino que se han de emplear sucesivamente varias de ellas. En general lo que se persigue es reducir el cálculo de una integral al de otras más sencillas.

Sección 9-1

Integrales inmediatas

Vamos a dar las funciones primitivas de algunas funciones que por su sencillez se suelen llamar integrales inmediatas. Estas fórmulas se obtienen directamente de las de derivación y únicamente tienen validez en los intervalos en los que el integrando es una función continua.

Las letras K, a, b, c y n representan números reales.

9-1.1 Propiedades

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx .$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx .$$

9-1.2 Integrales inmediatas

$$\int dx = x + K.$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + K \quad \text{para todo } n \neq -1.$$

$$\int \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + K \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N} \text{ y } n > 1.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \mathrm{Ln}\,|x| + K.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + K.$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\mathrm{Ln}\ a} a^x + K \quad \text{para todo } a \in \mathbf{R} \text{ y } a > 0.$$

$$\int \cos x\ dx = \mathrm{sen}\,x + K.$$

$$\int \mathrm{sen}\,x\ dx = -\cos x + K.$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + K;$$

$$\int \sec^2(x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2(x))\, dx.$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + K.$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + K;$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(x)\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2(x))\, dx.$$

$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + K.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + K;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + K \text{ para todo } a > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x) + K;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + K \text{ para todo } a > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcsec}|x| + K;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + K \text{ para todo } a > 0.$$

9-1.3 Otras integrales usuales

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\operatorname{Ln} |\cos x| + K.$$

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \operatorname{Ln} |\operatorname{sen} x| + K.$$

$$\int \sec x \, dx = \operatorname{Ln} |\sec x + \operatorname{tg} x| + K;$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \text{Ln}\,|\sec x + \text{tg}\,x| + K;.$$

$$\int \text{cosec}\,x\;dx = -\text{Ln}\,|\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x| + K;$$

$$\int \frac{1}{\text{sen}(x)}\,dx = -\text{Ln}\,|\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x| + K;.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,\text{Ln}\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + K \quad \text{para todo } a > 0..$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{Ln}\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + K \quad \text{para todo } a > 0.$$

Observación: La derivación de funciones consiste, generalmente, en utilizar adecuadamente las reglas y fórmulas de derivación una tras otra. Esta no es dificil de ser comprendida por el estudiante pues siempre es igual, sin embargo, no suele ocurrir lo mismo con la integración. Por ejemplo, derivar un producto o un cociente de funciones suele ser mucho más fácil que integrar dicho producto o cociente.

El estudiante necesita conocer más que unas simples reglas de integración para afrontar la integración, por ello, se presentan las técnicas o métodos de integración de las siguientes secciones.

Inicialmente se intenta calcular la integral comprobando si se puede utilizar alguna de las fórmulas inmediatas de integración. Quizas se requiera la realización de modificaciones en el integrando tales que se puedan utilizar alguna técnicas de resolución conocidas. Por ejemplo,

$$\int \frac{4}{x^2}\,dx = 4\int x^{-2}dx = 4\frac{1}{-1}\,x^{-1} + K = \frac{-4}{x} + K.$$

$$\int x(x^2-1)dx = \int (x^3-x)dx = \int x^3dx - \int x\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + K.$$

$$\int (x+2)^2dx = \int (x^2+4x+4)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x + K.$$

$$\int \frac{x^2-6}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int (x - \frac{6}{x})\,dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - 6\text{Ln}\,x) + K = \frac{x^2}{4} - 3\text{Ln}\,x + K.$$

Algunos procedimientos elementales para ajustar el integrando a las fórmulas básicas están representados en el siguiente cuadro:

Técnica	Ejemplo
1.- Desarrollar	$(1+\text{sen}\,x)^2 = 1+2\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x$.
2.- Sumar en el numerador	$\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$.
3.- Completar cuadrados	$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.
4.- Separar en suma	$\frac{2+\text{sen}\,(e^x)}{e^x} = \frac{2}{e^x} + \frac{\text{sen}\,(e^x)}{e^x}$.
6.- Dividir	$\frac{x}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x+1}$.

7.- Multiplicar y dividir por el conjugado

$$\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)\,(1+\cos x)} = \frac{1+\cos x}{(\text{sen} x)^2}.$$

8.- Relaciones trigonométricas $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

9.- Sumar y restar un factor $\text{tg}^2 x = (\text{tg}^2 x + 1) - 1$

Al integrar cocientes, no integre separadamente numerador y denominador, y no separe los denominadores. Estos son errores frecuentes. Obsérvese que

$$\int \frac{2}{x} dx \neq \frac{\int 2dx}{\int xdx} \quad ; \quad \int \frac{1}{\text{sen} x + 3} dx \neq \int \frac{1}{\text{sen} x} dx + \int \frac{1}{3} dx .$$

Ejemplo 1

Calculamos las integrales $I_1 = \int \frac{3}{x^2+4} dx$ e $I_2 = \int \frac{3x^2}{x^2+4} dx$.

La integral I_1 es inmediata de tipo arco tangente con $a = 2$.

$$I_1 = 3\int \frac{1}{x^2+4} dx = 3\frac{1}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x}{2} + K = \frac{3}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x}{2} + K.$$

La integral I_2 se descompone en una suma de integrales inmediatas al

dividir el numerador entre el denominador,

$$\frac{3x^2}{x^2+4} = 3\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) = 3\left(\frac{x^2+4-4}{x^2+4}\right) = 3\,(1+\frac{-4}{x^2+4}),$$

$$I_2 = 3\int\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)dx = 3\int\left(\frac{x^2+4-4}{x^2+4}\right)dx = 3\int\left(\frac{x^2+4}{x^2+4}+\frac{-4}{x^2+4}\right)dx$$

$$= 3\int(1+\frac{-4}{x^2+4})\,dx = 3\int dx + 3\int(\frac{-4}{x^2+4})\,dx = 3x +$$

$$3\,(-4)\int(\frac{1}{x^2+4})\,dx = 3x - 12\frac{1}{2}\,\text{arctg}\frac{x}{2}\,) + K = 3x - 6\text{arctg}\frac{x}{2} + K.$$

Ejemplo 2

Usamos la relación $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para calcular la integral

$$I = \int\frac{1-2\,(\cos x)^2}{\text{sen}x+\cos x}dx.$$

Como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, entonces

$1 - 2\cos^2 x = \text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\cos^2 x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$,

ademas, el integrando se reecribe de la forma:

$$\frac{\text{sen}^2 x-\cos^2 x}{\text{sen}x+\cos x} = \frac{(\text{sen}x+\cos x)\,(\text{sen}x-\cos x)}{\text{sen}x+\cos x} = \text{sen}x-\cos x.$$

Luego,

$$I = \int\frac{\text{sen}^2 x-\cos^2 x}{\text{sen}x+\cos x}dx = \int(\text{sen}x-\cos x)\,dx =$$

$$= \int\text{sen}x dx - \int\cos x dx = -\cos x - \text{sen}x + K.$$

Sección

9-2

Métodos elementales de integración

Ya se ha visto que en el caso de funciones continuas, la integración se simplifica, ya que, por el Teorema Fundamental del Cálculo, se reduce a la búsqueda de funciones primitivas. La integración de funciones continuas se presenta como el proceso inverso de la derivación, aunque, ya debe saber el lector que la integración es menos directa que la derivación.

A menudo para poder utilizar las fórmulas básicas de integración hay que reescribir la función integrando de una forma equivalente; para ello, en esta sección, estudiamos tres reglas de integración: integración por descomposición, por partes y por cambio de variable. Dichas reglas corresponden a las tres reglas de derivación: derivada de la suma, del producto y de la función compuesta y amplían el conjunto de integrales a las que puede aplicarse las fórmulas de integrales inmediatas.

9-2.1 Integración por descomposición

Sea f una función continua en [a,b]. Si f se descompone en la suma de las funciones g y h, también continuas en [a,b], entonces

$$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx.$$

Esto es consecuencia inmediata de las Proposiciones 7-3.1 y 8-2.6.

Ejemplo 3

$$\int (x^5 + 2x^3 + x^{-1})\,dx = \int x^5\,dx + \int 2x^3\,dx + \int x^{-1}dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 + 2\int x^3\,dx + \operatorname{Ln} x = \frac{1}{6}x^6 + 2\,\frac{1}{4}\,x^4 + \operatorname{Ln} x + K.$$

A continuación presentaremos una nueva técnica de integración llamada "integración por partes". Se emplea para muchas funciones pero es particularmente eficaz para aquellas que son producto de funciones

algebraicas o trascendentes, por ejemplo, integrandos de la forma $x \cos x$, $x e^x$, $e^x \operatorname{sen} x$ ...

9-2.2 Integración por partes

Sean u y v dos funciones derivables, con derivadas continuas en [a,b], entonces

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

Demostración

El segundo miembro es una función primitiva del integrando del primer miembro, puesto que al derivar el segundo miembro se obtiene

$$(u \cdot v)' - u' \cdot v = u' \cdot v + u \cdot v' - u' \cdot v = u \cdot v'.$$

Observación: En la fórmula de la integración por partes se interpreta el integrando original como producto u·v de dos funciones, una que se deriva y otra que se integra. La elección adecuada de las funciones u y v, desplaza la dificultad del cálculo de la integral inicial al cálculo de otra integral que deberá ser más sencilla de calcular. Esta elección es muy importante en el proceso, por ello, sugerimos las siguientes recomendaciones:

1) Procure elegir v´ que sea fácil de integrar, es decir, que se corresponda con una integral inmediata o conocida por usted, y u como los factores restantes del integrando.

2) Intente elegir u como la parte del integrando de derivada más simple (potencias, exponenciales, logaritmos, senos, cosenos, ...) y v´ como los factores restantes del integrando.

Ejemplo 4

Para calcular $\int x \cos x\, dx$ elegimos :

$$v' = \cos x \text{ , luego, } v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

y

$$u = x \text{ , por tanto, } u' = 1.$$

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + K.$$

Ejemplo 5

En la integral $\int x^2 e^x dx$ se aplica varias veces la fórmula de integración por partes.

Elegimos como u a la función x^2 y no a la función e^x debido a que x^2 se degrada al derivar, mientras que e^x se reproduce a si misma.

$$u = x^2 \text{ , luego, } u' = 2x$$

y

$$v' = e^x \text{, por tanto, } v = \int e^x dx = e^x .$$

Así pues, $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$.

Aplicamos a la última integral de nuevo integración por partes:

$u = 2x$,luego, $u' = 2$ y $v' = e^x$, por tranto, $v = \int e^x dx = e^x$.

Así pues, $\int 2x e^x dx = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2 e^x + K$.

La integral inicial es

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + K.$$

Observación: Si se aplica reiteradamente la integración por partes, hay que cuidarse de no intercambiar las sustituciones en las aplicaciones sucesivas, ya que, en ese caso, se deshace la integración previa y se vuelve a la integral original. También se debe prestar atención a la posible aparición de la integral original.

Ejemplo 6

Para calcular la integral $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ elegimos sen x como u puesto que al derivar dos veces esta función se reproduce con signo contrario

$$u = \operatorname{sen} x \Rightarrow u' = \cos x \quad \text{y} \quad v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x.$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Aplicamos otra vez la fórmula a la segunda integral:

$$u = \cos x \Rightarrow u' = -\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x.$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Así pues, $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$

Luego, $2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$ y, por tanto,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + K.$$

Ejemplo 7

Calculamos $\int \operatorname{Ln} x \, dx$ con integración por partes. Elegimos:

$$u = \operatorname{Ln} x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad v' = 1 \Rightarrow v = \int 1 dx = x.$$

$$\int \operatorname{Ln} x \, dx = x \operatorname{Ln} x - \int x \frac{1}{x} dx = x \operatorname{Ln} x - x + K = x(\operatorname{Ln} x - 1) + K.$$

Observación: Algunas integrales por partes más frecuentes:

Para $\int x^n \operatorname{sen} x \, dx$, $\int x^n \cos x \, dx$, $\int x^n e^x dx$, se toma $u = x^n$.

Para $\int x^n \operatorname{arcsen} x \, dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$, se toma $v' = x^n$.

Para $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$, $\int e^x \cos x \, dx$, se toma $v' = e^x$.

Seguidamente estudiaremos técnicas para la integración de funciones compuestas. Dichas técnicas se basan en una fórmula que establecemos en la siguiente proposición.

9-2.3 Integración por cambio de variable

Sean $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua y $g:[c,d] \rightarrow \mathbf{R}$ una función derivable con derivada continua tal que $g([c,d])$ está contenido en $[a,b]$.

Entonces $\int (f \circ g)(x) \cdot g'(x) dx = (\int f(x) dx) \circ g(x).$

Demostración

El segundo miembro es una función primitiva del integrando del primer miembro, puesto que al derivar el segundo miembro, aplicando la regla de la cadena (Proposición 5-1.6), se obtiene

$$[(\int f)\circ g]' = [(\int f)' \circ g]\cdot g' = (f \circ g)\cdot g'.$$

Observación: Según la proposición anterior, si f y g son dos funciones que satisfacen la regla de la cadena y F es una primitiva de f, entonces

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + K.$$

En la práctica, al aplicar el método de integración por cambio de variable para calcular una integral, dividimos el problema en dos partes:

distinción del tipo y sustitución de variables.

Lo primero es reconocer la presencia de $f(g(x))$ y $g'(x)$, para ello hay que fijarse en que la función compuesta en el integrando tiene una "función exterior" e f y una "función interior" g cuya derivada $g'(x)$ es otro factor del integrando.

Antes de ver varios ejemplos de integración por sustitución o cambio de variable, resumimos el método en los siguientes pasos:

1.- Elegir una sustitución $u = g(x)$.

2.- Evaluar la derivada de la función u y escribir si hay algún factor constante c de $g'(x)$ que no esté en el integrando inicial.

3.- Reescribir el integrando $f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$ en la forma $\frac{1}{c} f(u)\, du$.

4.- Integrar en u.

5.- Deshacer el cambio de variable poniendo $g(x)$ en lugar de u.

Conviene recordar la siguiente tabla de integrales obtenida a partir de la tabla de integrales inmediatas

$$\int f'(x)dx = f(x) + K.$$

$$\int (f(x))^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + K \quad \text{para todo } n \neq -1.$$

$$\int \sqrt[n]{f(x)}\, f'(x)\, dx = \frac{1}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}} + K \quad \text{con } n \in \mathbf{N} \text{ y } n>1.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \operatorname{Ln}|f(x)| + K.$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + K.$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{1}{\text{Ln } a} a^{f(x)} + K \quad \text{para } a>0.$$

$$\int \cos f(x)\, f'(x)\,dx = \text{sen } f(x) + K.$$

$$\int \text{sen } f(x)\, f'(x)\,dx = -\cos f(x) + K.$$

$$\int \sec^2 f(x)\, f'(x)\,dx = \text{tg } f(x) + K;$$

$$\int \sec^2 f(x)\, f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \int (1 + \text{tg}^2 f(x))\, f'(x)\,dx.$$

$$\int \sec f(x)\ \text{tg } f(x)\, f'(x)\,dx = \sec f(x) + K.$$

$$\int \text{cosec}^2 f(x)\, f'(x)\,dx = -\text{cotg} f(x) + K;$$

$$\int \text{cosec}^2 f(x)\, f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)}\,dx = \int (1 + \text{ctg}^2 f(x))\, f'(x)\,dx$$

$$\int \text{cosec } f(x)\ \text{cotg } f(x)\, f'(x)\,dx = -\text{cosec } f(x) + K.$$

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} = \text{arcsen}(f(x)) + K \;;$$

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{(f(x))^2 + 1} = \text{arctg}(f(x)) + K \;;$$

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)\sqrt{(f(x))^2 - 1}} = \text{arcsec}|f(x)| + K \;;$$

Ejemplo 8

Para integrar $\int \text{sen}2x \cos 2x\,dx$ podemos realizar la trasformación

$$\int \text{sen}2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\text{sen}2x \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{sen}4x\,dx = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\int 4\text{sen}4x\,dx = \frac{-1}{8}\cos 4x + K.$$

También, se puede hacer el cambio de variable dado por la función $g(x) = \operatorname{sen}2x$, es decir, $\operatorname{sen}2x$ se sustituye por una nueva variable u y. $2\cos 2x\,dx$ se sustituye por du. Se denota

$$u = \operatorname{sen} 2x \quad y \quad 2\cos 2x\,dx = du.$$

$$\int \operatorname{sen}2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}2x\,(2\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}u^2 + K = \frac{1}{4}u^2 + K = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x + K,$$

al deshacer el cambio al final.

Ejemplo 9

Para calcular $I = \int 5x\,\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ se realiza un cambio de variable

$$u = 1 + x^2 \qquad \text{con} \qquad du = 2x\,dx,$$

puesto que la derivada de $1 + x^2$ es $2x$, y x esta presente en el integrando . Multiplicamos y dividimos por 2 para que aparezca 2x en el integrando.

$$I = \frac{1}{2}\int 5\,(2x)\,\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{5}{2}\int \sqrt[3]{u}\,du = \frac{5}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{5}{2}\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + K =$$

$$= \frac{15}{8}\sqrt[3]{u^4} + K = \frac{15}{8}u\sqrt[3]{u} + K = \frac{15}{8}(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2} + K.$$

Ejemplo 10

Calculamos $\int_0^1 \operatorname{sen}(e^x)\,e^x dx$ mediante cambio de variable. Elegimos $u = e^x$, con $du = e^x dx$.

La variable x varia de 0 a 1, así pues, tenemos que estudiar los límites de integración para la variable u.

$$x = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1 \qquad y \qquad x = 1 \Rightarrow u = e^1 = e.$$

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(e^x)\,e^x dx = \int_1^e \operatorname{sen}(u)\,du = [-\cos(u)]\big|_1^e = \cos 1 - \cos e.$$

Obsérvese, que esta integral es inmediata según la segunda tabla de integrales al considerar $f(x) = e^x$.

Ejemplo 11

Hallamos la integral $I = \int x^3 \cos x^4 \, dx$ haciendo el cambio

$$u = x^4 \quad \text{con} \quad du = 4x^3 dx.$$

$$I = \frac{1}{4}\int 4x^3 \cos x^4 dx = \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + K = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x^4 + K.$$

Obsérvese, que esta integral es inmediata según la segunda tabla de integrales al considerar $f(x) = x^4$.

Aunque en el integrando no está $f'(x)$, $4x^3$, pues falta el factor 4, multiplicamos y dividimos el integrando por 4 para que aparezca.

Ejemplo 12

Hallamos la integral $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx$ haciendo el cambio de variable

$$u^2 = x \quad \text{con} \quad 2u\,du = dx.$$

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{4u}{1+u} du = 4\int du - 4\int \frac{1}{1+u} du = 4u - 4\operatorname{Ln}(1+u),$$

y al deshacer el cambio,

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} - 4\operatorname{Ln}(1+\sqrt{x}).$$

Sección

9-3

Integración de funciones racionales

Como se ve en el Capítulo 3, una función es racional si está definida por el cociente de dos polinomios con coeficientes reales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{con } Q(x) \neq 0.$$

En esta sección nos ocupamos del problema práctico de calcular la integral de una función racional. Para ello, se muestra el método de las fracciones simples, introducido en 1702 por John Bernouilli (1667-1748), cuya única dificultad práctica consiste en encontrar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

El problema planteado se resuelve aplicando algunos de los dos resultados de naturaleza algebraica que daremos sin demostración:

- La descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

- La descomposición en fracciones simples de una fracción racional con coeficientes reales.

9-3.1 Integración por descomposición en fracciones simples

A continuación se establecen los pasos a seguir.

I- Si la fracción es impropia, es decir, el grado de numerador es mayor o igual que el del denominador, se divide para conseguir una fracción propia,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

con grado de $R(x)$ menor que grado de $Q(x)$.

II- Integrar C(x), pues es un polinomio y, por tanto, fácil de integrar.

III- Si se trata de una fracción propia se descompone en factores el denominador, para lo cual se resuelve la ecuación $Q(x) = 0$.

Se factoriza el denominador $Q(x)$ en factores de la forma $(x\text{-}a)^m$ (correspondientes a las raíces reales de $Q(x)$) y en factores de la forma $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^n$ donde $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es un polinomio real irreducible (correspondientes a las raíces complejas de $Q(x)$).

IV- Si hay factores lineales, entonces por cada factor $(x\text{-}a)^m$ se consideran las m fracciones siguientes

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m},$$

donde los coeficientes A_i, con $i = 1 \dots m$, se determinan por el método de los coeficientes indeterminados.

Cada una de las referidas fracciones tienen una integral inmediata, bien del tipo logaritmo o bien del tipo potencia.

V- Si hay factores cuadráticos, entonces por cada factor de la forma $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^n$ se consideran las n fracciones siguientes

$$\frac{B_1 x + C_1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{B_2 x + C_2}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^n},$$

donde los coeficientes B_i y C_i, con $i = 1 \dots n$, se determinan por el método de los coeficientes indeterminados.

Cada una de las referidas fracciones tienen una integral inmediata o que se descompone en inmediatas fácilmente, bien del tipo logaritmo o bien del tipo potencia o bien del tipo arco tangente.

Se pueden dar en las raíces de $Q(x) = 0$ los cuatro casos siguientes:

1.- Son todas reales y simples (distintas). Integrales tipo logaritmo.

2.- Son todas reales pero alguna o varias son múltiples. Integrales tipo logaritmo para las fracciones con denominador de exponente 1 e integrales tipo potencia para las de exponente distinto mayor que 1.

3.- Hay raíces complejas y son simples (distintas). Integrales que se descomponen en suma de una integral tipo logaritmo (la parte con x del numerador) y otra tipo arco tangente (la parte sin x del numerador).

4.- Hay complejas y alguna o varias son múltiples.

Ejemplo 13

Calculamos $I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ hallando las raíces del denominador,

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$, y reescribiendo

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$$

Al descomponer en fracciones simples y sumar estas últimas

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3} = \frac{A_1(x-3) + A_2(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2)x + (-3A_1 - 2A_2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Al igualar los coeficientes de los numeradores del primer y último miembro se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} A_1+A_2=0 \\ -3A_1-2A_2=1 \end{array}\right\} \text{ de solución } A_1 = -1, \ A_2 = 1.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{-1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x-3}dx = -\text{Ln}|x-2| + \text{Ln}|x-3| + K.$$

Ejemplo 14

Para calcular la integral $I = \int \frac{x+1}{x^3 - 2x^2 + x}dx$ factorizamos el denominador, $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$, y descomponemos en fracciones simples el integrando

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}.$$

Al sumar el segundo miembro e igualar los numeradores se tiene que

$$x+1 = A_1(x-1)^2 + A_2x(x-1) + A_3x = (A_1+A_2)x^2 + (-2A_1-A_2+A_3)x + A_1.$$

Al igualar coeficientes resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{l} A_1+A_2 \quad =0 \\ -2A_1-A_2+A_3=1 \\ A_1 \quad =1 \end{array}\right\} \quad \text{de solución } A_1=1, A_2=-1, A_3=2.$$

Por tanto,

$$I = \int\frac{dx}{x} + \int\frac{-dx}{x-1} + \int\frac{2dx}{(x-1)^2} = \text{Ln}|x| - \text{Ln}|x-1| - \frac{2}{x-1} + K.$$

Observación: Si al igualar numeradores se presenta un sistema extenso en el cual aparecen ecuaciones con casi todos los coeficientes desconocidos, entonces es más cómodo trabajar con ecuaciones de menos coeficientes desconocidos obtenidas al sustituir x por alguna raíz en la igualdad o en alguna de las derivadas de la igualdad. Esto se ilustra con la igualdad del Ejemplo 14

$$x+1 = A_1(x-1)^2 + A_2\,x\,(x-1) + A_3\,x\,.$$

Si se sustituye x por 1 en la igualdad queda $2 = A_3$,

al derivar la anterior igualdad,

$$1 = 2A_1(x-1) + A_2\,(x-1) + A_2\,x + A_3,$$

y sustituir x por 1 queda $1 = A_2 + A_3$, de lo cual $A_2 = 1 - A_3 = -1$.

Si se deriva la anterior igualdad se obtiene $0 = 2A_1 + A_2 + A_2$, de lo cual $A_1 = -A_2$.

Ejemplo 15

Calculamos $I = \int\frac{x^3-3x+3}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}dx$ factorizando el denominador, $x^4-4x^3+5x^2-4x+4 = (x^2+1)\,(x-2)^2$, y escribiendo

$$\frac{x^3-3x+3}{(x^2+1)\,(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1}\,,$$

Al sumar el segundo miembro e igualar numeradores se tiene

$$x^3-3x+3 = A_1\,(x-2)\,(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (B_1x+C_1)\,(x-2)^2 =$$

$= (A_1+B_1)x^3+ (A_2-2A_1-4B_1+C_1)x^2+(A_1+4B_1-4C_1)x +(A_2-2A_1+4C_1).$

Al igualar coeficientes y resolver el sistema que aparece se obtiene la solución $A_1 = 1, A_2 = 1, B_1 = 0, C_1 = 1$. En consecuencia,

$$I = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \text{Ln}|x-2| - \frac{1}{x-2} + \text{arctg}x + K.$$

Para el cuarto caso en que en la descomposición del polinomio $Q(x)$ se presentan raíces múltiples, sobre todo complejas, el procedimiento mostrado es poco conveniente. Vamos a explicar el método de Hermite sin demostrarlo, que evita una parte de los cálculos de descomposición, y permite hallar de manera directa la parte racional del resultado de la integración, que se completa con el cálculo de una integral en la que el denominador sólo tiene raíces simples.

9-3.2 Método de Hermite

Sean f una función racional definida por la fracción propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $B_1(x)$ el máximo común divisor de $Q(x)$ y $Q'(x)$ y $B_2(x)$ el cociente de $Q(X)$ por $B_1(x)$. Entonces toda función primitiva de f, admite una descomposición única de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \int \frac{A_2(x)}{B_2(x)} dx$$

en la que $\frac{A_1(x)}{B_1(x)}$ y $\frac{A_2(x)}{B_2(x)}$ son fracciones propias, y B_2 tiene raíces simples únicamente.

El método se resume en los siguientes pasos:

1) Se calcula $B_1(x) =$ m.c.d. $[Q(x), Q'(x)]$.

2) Se halla $B_2(x) = \frac{Q(x)}{B_1(x)}$.

3) Se consideran los polinomios de coeficientes indeterminados $A_1(x)$ y $A_2(x)$ con grados inferiores en una unidad a los de $B_1(x)$ y $B_2(x)$ respectivamente.

4) Se deriva la igualdad

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \int \frac{A_2(x)}{B_2(x)}dx$$

y se obtiene la igualdad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A'_1(x)B_1(x) - A_1(x)B'_1(x)}{(B_1(x))^2} + \frac{A_2(x)}{B_2(x)}$$

y al quitar denominadores en esta igualdad se identifican los coeficientes de $A_1(x)$ y $A_2(x)$.

Ejemplo 16

Para calcular la integral $I = \int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$ interesa aplicar el método de Hermite pues tiene dos raíces complejas de orden dos.

$Q(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 \Rightarrow Q'(x) = 2(x^2 -2x+2)(2x-2) = 4x^3 -12x^2+16x - 8.$

Por tanto,

$B_1(x) = \text{m.c.d.}[(x^4-4x^3+8x^2-8x+4), (4x^3-12x^2+16x-8)] = x^2 - 2x + 2.$

$$B_2(x) = \frac{(x^2-2x+2)^2}{(x^2-2x+2)} = x^2 - 2x + 2.$$

La descomposición de Hermite es de la forma

$$\frac{1}{(x^2-2x+2)^2} = \left(\frac{ax+b}{x^2-2x+2}\right)' + \frac{cx+d}{(x^2-2x+2)}.$$

Al efectuar la derivación, operar y, por último, identificar los coeficientes resulta el sistema

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = -a - 2c + d \\ 0 = -2b+2c-2d \\ 1 = 2a+2b+2d \end{cases}$$

cuya solución es $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0, d = \frac{1}{2}$.

Por tanto, $$I = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x^2 - 2x + 2)} dx =$$

$$\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1) + K.$$

Ejemplo 17

Al calcular la integral indefinida $I = \int \frac{x^3}{(x^2+4)^2} dx$ aplicamos el método de Hermite con

$$Q(x) = (x^2 + 4)^2,$$
$$Q'(x) = 2(x^2 + 4)\,2x,$$
$$B_1(x) = B_2(x) = x^2 + 4.$$

Por tanto, $$\frac{x^3}{(x^2+4)^2} = \left(\frac{ax+b}{x^2+4}\right)' + \frac{cx+d}{x^2+4}.$$

Al derivar, quitar denominadores e identificar coeficientes se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 1 = c \\ 0 = -a + d \\ 0 = (-2)b + 4c \\ 0 = 4a + 4d \end{cases}$$

cuya solución es $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ y $d = 0$.

En consecuencia,

$$I = \frac{2}{x^2+4} + \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{2}{x^2+4} + \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2+4) + K.$$

Sección

9-4

Integrales de funciones trigonométricas

En la sección anterior se estudian dos procedimientos para calcular integrales, definidas o indefinidas, de funciones racionales. Esta sección y las siguientes se ocupan de evaluar integrales de funciones no racionales, se resuelven algunos casos concretos utilizando ciertos cambios de variable con los que se transforma la integral inicial en otra cuyo integrando ya es una función racional. No existe un método general sino reglas para algunos casos especiales.

Consideramos primero algunos tipos de funciones trigonométricas. Después nos ocuparemos de las integrales de algunas funciones exponenciales y, por último, veremos las primitivas de ciertas funciones irracionales.

9-4.1 Funciones trigonométricas

Sea $R(x,y)$ es una función racional de dos variables. La integral de la forma $$\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx$$

se reduce a la integral de una función racional, al considerar el cambio de variable

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Al combinar las igualdades trigonométricas se tiene:

$$\operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Estas expresiones del $\operatorname{sen}x$, $\cos x$ y dx en función de t, se obtienen de las fórmulas que expresan el seno y el coseno de un ángulo en función de la tangente de su ángulo mitad.

Así pues,

$$\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

y esta última integral se reduce al cálculo de la primitiva de una función racional.

Ejemplo 18

En la integral $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$ utilizamos el cambio $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$.

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \operatorname{Ln}|t| = \operatorname{Ln}\left|\operatorname{tg}(\frac{x}{2})\right| + K.$$

Ejemplo 19

Para calcular $I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$ utilizamos el cambio $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, de donde $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ y $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2dt}{-t^2 + 2t + 1} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2 - 2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Ln}\left|\frac{(t-1) - \sqrt{2}}{(t-1) + \sqrt{2}}\right| = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Ln}\left|\frac{(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) - 1) - \sqrt{2}}{(\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) - 1) + \sqrt{2}}\right| + K.$$

Para este tipo de integrales existen otros cambios de variable que conducen en la práctica al cálculo de funciones racionales más sencillas, pero solamente en ciertos casos particulares. Dicho cálculo se basa en la siguiente proposición que daremos sin demostrar y cuya demostración se puede ver en el libro "Principios de Análisis Matemático" de E. Linés, Editorial Reverté, página 479-480.

9-4.2 Proposición

Sea $R(x,y)$ una función racional de dos variables. La integral de la forma $\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx$
se reduce a la integral de una función racional en los casos siguientes:

- Si la expresión $R(\operatorname{sen}x,\cos x)dx$ permanece invariante al sustituir:

1) x por -x, se efectúa el cambio de variable $t = \cos x$. Es decir, $R(\operatorname{sen}x,\cos x)$ es una función impar en $\operatorname{sen}x$.

2) x por $\pi - x$, se efectúa el cambio de variable $t = \operatorname{sen}x$. Es decir, $R(\operatorname{sen}x,\cos x)$ es una función impar en $\cos x$.

3) x por $\pi + x$ se efectúa el cambio de variable $t = \operatorname{tg} x$.

- En algunas integrales de funciones trigonométricas es muy útil usar las identidades:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx = \frac{1}{2}\left(\cos[(a-b)x] - \cos[(a+b)x]\right),$$

$$\operatorname{sen} ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}[(a-b)x] + \operatorname{sen}[(a+b)x]\right),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos[(a-b)x] + \cos[(a+b)x]\right).$$

- En el caso de integrales de potencias de tangentes y secantes:

1) Si es potencia par en $\sec x$, se efectúa el cambio $t = \operatorname{tg} x$.
2) Si es potencia impar en $\operatorname{tg} x$, se efectúa el cambio $t = \sec x$.

Ejemplo 20

Como la función del integrando de $I = \int \frac{dx}{(\cos x)^6}$ es una función

par en $\cos x$, utilizamos el cambio $t = \operatorname{tg} x$, es decir, $x = \operatorname{arc\,tg} t$.

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{tg} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{(\cos x)^6} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^3}{1+t^2} dt = \int (1+t^2)^2 dt =$$

$$= \int (1+t^4+2t^2)\, dt = t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + K =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + K.$$

Ejemplo 21.

Para calcular la integral $\int \cos x \operatorname{sen} 5x\, dx$ utilizamos la fórmula

$$\operatorname{sen} ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}[(a-b)x] + \operatorname{sen}[(a+b)x]), \text{ para } a=5 \text{ y } b=1.$$

$$\int \cos x \operatorname{sen} 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{2}\frac{\cos 6x}{6} + K.$$

Sección

9-5 Integrales del tipo R (a^x)

Las integrales de la forma

$$\int R(a^x)dx\,,$$

donde R una función racional, se reducen a integrales racionales con el cambio de variable $x = \log_a t$, es decir, $t = a^x$.

Ejemplo 22

Para calcular $\int \frac{3^x}{9^x+1}dx$ hacemos el cambio de variable

$$x = \log_3 t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{t\text{Ln}3}.$$

Así pues,

$$\int \frac{3^x}{9^x+1}dx = \frac{1}{\text{Ln}3}\int \frac{tdt}{(t^2+1)\,t} = \frac{1}{\text{Ln}3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\text{Ln}3}\text{arctg}t + K =$$

$$= \frac{1}{\text{Ln}3}\text{arctg}3^x + K.$$

Observación: Las integrales en las que intervienen funciones hiperbólicas,

$$\text{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

suelen ser de este tipo.

Sección

9-6

Integración de algunas funciones irracionales

En esta sección se consideran tres tipos de integrales de funciones irracionales: integrales cuadráticas, integrales bilineales e integrales binómicas.

El cálculo de éstas se obtiene por métodos elementales. En nuestra exposición se considerará conseguido el cálculo cuando se transforme en el cálculo de la integral de funciones racionales o trigonométricas ya estudiadas con anterioridad.

9-6.1 Integrales irracionales cuadráticas

Estas integrales son del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx,$$

donde R es una función racional, $a,b,c \in \mathbf{R}$ y $a \neq 0$.

En estas integrales el trinomio de segundo grado del radicando siempre se puede escribir de alguna de las formas siguientes:

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} (dx+e)^2 + m^2 \\ (dx+e)^2 - m^2 \\ m^2 - (dx+e)^2 \end{cases},$$

y se considera el cambio

$$\begin{cases} (dx+e)^2 + m^2 = u^2 + m^2 \\ (dx+e)^2 - m^2 = u^2 - m^2 \\ m^2 - (dx+e)^2 = m^2 - u^2 \end{cases} \text{, es decir, } (dx+e)^2 = u^2.$$

Así pues, el radical $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ se transforma en alguno de los siguientes radicales:

$$\sqrt{u^2 + m^2}\ ;\ \sqrt{u^2 - m^2}\ ;\ \sqrt{m^2 - u^2}.$$

Para eliminar los radicales del integrando usamos alguna de las igualdades siguientes:

$$1+tg^2\alpha = sec^2\alpha, \quad tg^2\alpha = sec^2\alpha - 1, \quad cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha.$$

Estas integrales se transforman en integrales con potencias de funciones trigonométricas.

1) La integral $\int R(x, \sqrt{u^2+m^2})dx$ se calcula utilizando el cambio de variable $u = m \cdot tg\alpha$, con lo cual el radical se transforma en

$$\sqrt{u^2+m^2} = m \cdot sec\alpha.$$

2) La integral $\int R(x, \sqrt{u^2-m^2})dx$ se calcula utilizando el cambio de variable $u = m \cdot sec\alpha$, con lo cual el radical se transforma en

$$\sqrt{u^2-m^2} = m \cdot tg\alpha.$$

3) La integral $\int R(x, \sqrt{m^2-u^2})dx$ se calcula utilizando el cambio de variable $u = m \cdot sen\alpha$, con lo cual el radical se transforma en

$$\sqrt{m^2-u^2} = m \cdot cos\alpha.$$

Estas integrales se reducen al tipo $\int R(sen\, x, cos\, x)\, dx$.

Ejemplo 23

Para calcular la integral irracional $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$ reescribimos el radicando $x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 3^2$ y utilizamos el cambio

$$x - 3 = 3sec\,\alpha \quad \Rightarrow \quad dx = 3sec\alpha\, tg\alpha\, d\alpha.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}} = \int \frac{3sec\alpha tg\alpha d\alpha}{3tg\alpha} = \int sec\alpha d\alpha = Ln|sec\alpha + tg\alpha| + K =$$

$$= Ln\left|\frac{x-3}{3} + \frac{\sqrt{x^2-6x}}{3}\right| + K.$$

Ejemplo 24

Al calcular la integral definida $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ usamos el cambio

$$x = 2\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow dx = 2\cos\alpha\, d\alpha .$$

Luego,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\,(1-(\operatorname{sen}\alpha)^2)} = 2\cos\alpha \quad , \quad \alpha = \operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{2})$$

$$x=0 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen}(0) = 0 \quad y \quad x=1 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} .$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\alpha d\alpha}{2\cos\alpha} = \alpha\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$$

Ejemplo 25

Para la integral irracional cuadrática $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}}$ consideramos

$$2x = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sec^2\alpha\, d\alpha, \quad y \quad \sqrt{4x^2+1} = \sec\alpha.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\alpha}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha} d\alpha = \int \operatorname{cosec}\alpha d\alpha =$$

$$= -\operatorname{Ln}|\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha| + K = -\operatorname{Ln}\left|\frac{\sqrt{4x^2+1}+1}{2x}\right| + K.$$

9-6.2 Integrales irracionales bilineales

Estas integrales son del tipo

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{r}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{q}{s}}, \dots\right]dx,$$

donde R es una función racional, $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ y $p,q,r,s,\dots \in \mathbf{N}$.

Si se denomina por m el mínimo común múltiplo de los denominadores $r, s, \dots$, entonces se considera el cambio

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ es decir, } x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$$

y la integral se reduce a una integral racional.

Ejemplo 26

Para calcular $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x}}$, primero se utiliza el cambio

$$4+x = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 4 \Rightarrow dx = 2tdt,$$

y, posteriormente, se desarrolla la integral racional que aparece.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x}} = \int \frac{2tdt}{(t^2-4)^2 t} = 2\int \frac{dt}{(t^2-4)^2} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2(t-2)^2} =$$

$$= 2\left(\int \frac{a}{t+2}dt + \int \frac{b}{(t+2)^2}dt + \int \frac{c}{t-2}dt + \int \frac{d}{(t-2)^2}dt\right).$$

Calculamos los coeficientes de la descomposición en fracciones a partir de la igualdad

$$1 = a(t+2)(t-2)^2 + b(t-2)^2 + c(t-2)(t+2)^2 + d(t+2)^2.$$

Al sustituir en esta igualdad $t = 2$, se obtiene que $d = \frac{1}{16}$.

Para $t = -2$, se obtiene que $b = \frac{1}{16}$.

Al sustituir los valores de b y d e identificar coeficientes de igual grado en la igualdad resultante se obtiene que

$$0 = a + c \quad , \quad 1 = 8a + \frac{1}{4} - 8c + \frac{1}{4},$$

que constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es $a = \frac{1}{32}$ y $c = -\frac{1}{32}$.

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x}} = \frac{1}{16}\text{Ln}|t+2| - \frac{1}{8}\frac{1}{t+2} - \frac{1}{16}\text{Ln}|t-2| - \frac{1}{8}\frac{1}{t-2} + K =$$

$$= \frac{1}{16}\text{Ln}\left|\frac{t+2}{t-2}\right| - \frac{t}{4\,(t^2-4)} + K = \frac{1}{16}\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}-2}\right| - \frac{\sqrt{4+x}}{4x} + K.$$

9-6.3 Integrales irracionales binómicas

Estas integrales son del tipo

$$\int x^m\,(a+bx^n)^q\,dx, \quad \text{con } a, b \in \mathbf{R}, \; m, n, q \in \mathbf{Q}.$$

La integral se reduce a otra más sencilla de este tipo al utilizar el cambio de variable:

$$x^n = t \;, \quad x = t^{\frac{1}{n}} \;, \quad dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

$$\int x^m\,(a+bx^n)^q dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^q t^p dt, \quad \text{con } p = \frac{m-n+1}{n}.$$

Esta última integral se racionaliza en los tres casos siguientes:

1) Si q es entero y $p = \frac{r}{s}$ se utiliza el cambio $t = z^s$, con $dt = s\,z^{s-1}dz$, obteniéndose la integral racional $\int s\,(a+bz^s)^q\,z^{r+s-1}\,dz$.

2) Si p es entero y si $q = \frac{r}{s}$ se utiliza el cambio $a + bt = z^s$, es decir, $t = \frac{z^s - a}{b}$ con $dt = \frac{sz^{s-1}}{b}dz$, obteniéndose la integral racional

$$\frac{s}{b^{p+1}}\int (z^s - a)^p\, z^{r+s-1}\,dz.$$

3) Si $p+q$ es entero y $q=\frac{r}{s}$ se utiliza el cambio $\frac{a+bt}{t}=z^s$, es decir,

$t=\frac{a}{z^s-b}$ con $dt=\frac{-asz^{s-1}}{(z^s-b)^2}dz$, obteniéndose la integral racional

$$(-a^{p+q+1})\,s\int\frac{z^{r+s-1}}{(z^s-b)^{p+q+2}}dz\,.$$

Ejemplo 27

Para la integral $\int\frac{\sqrt{x}}{(1-x)^2}dx$ el cambio de variable más apropiado es

$$x=z^2\quad;\quad dx=2z\,dz.$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1-x)^2}dx=\int\frac{z2zdz}{(1-z^2)^2}=2\int\frac{z^2}{(1-z)^2(1+z)^2}dz.$$

Al descomponer el integrando en fracciones simples

$$\frac{z^2}{(1-z)^2(1+z)^2}=\frac{a}{1-z}+\frac{b}{(1-z)^2}+\frac{c}{1+z}+\frac{d}{(1+z)^2}=$$

$$=\frac{-1/4}{1-z}+\frac{1/4}{(1-z)^2}+\frac{-1/4}{1+z}+\frac{1/4}{(1+z)^2},$$

resulta que

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1-x)^2}dx=2\left(\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|1-z|+\frac{1}{4}\frac{1}{1-z}-\frac{1}{4}\mathrm{Ln}|1+z|-\frac{1}{4}\frac{1}{1+z}\right)+K$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}|1-\sqrt{x}|+\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\mathrm{Ln}|1+\sqrt{x}|-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)+K=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right|+\frac{\sqrt{x}}{1-x}+K.$$

Problemas Propuestos

1) Integrar de dos formas diferentes $\int (x^3-2)^2 x^2 dx$.

2) Calcular $\int \frac{(Lnx)^3}{x} dx$.

3) Evaluar la integral definida $\int_1^e \frac{x^2-1}{x} dx$.

4) Calcular $\int \frac{3+x}{(x-1)^2} dx$.

5) Hallar una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}$.

6) Hallar $\int (x+1)\, e^x dx$.

7) Calcular las integrales definidas:

a) $I_1 = \int_0^1 x \arccos x^2 dx$. b) $I_2 = \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(\frac{x}{2})\, dx$.

8) Evaluar la integral $\int \frac{x-1}{x(x^2+1)} dx$.

9) Evaluar la integral $\int \frac{x^2+2x-1}{x^6+2x^4+x^2} dx$.

10) Calcular la integral indefinida de la función $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x}$.

11) Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

12) Calcular $\int \sqrt{\frac{x+1}{1-2x}} dx$.

Capítulo 10

Integrales Impropias

En la práctica, al aplicar técnicas integrales a la Física, la Economía o al Cálculo de Probabilidades, es necesario calcular integrales sobre intervalos no compactos. Sin embargo, la integral de Riemann sólo permite integrar funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados.

Esto plantea la necesidad de establecer alguna generalización de la integral, de forma, que se puedan calcular "áreas" relativas a las gráficas de funciones definidas en toda la recta real, semirrectas o incluso en intervalos acotados no cerrados; (a,b), [a,b) ó (a,b].

Todos los casos de esta nueva integración se reducen a dos:

1. Aquellos en los que el dominio de integración es una semirrecta $[a,+\infty)$, denominándose a las integrales correspondientes, **integrales impropias de primera especie**.

2. Aquellos en los que el dominio de integración es un intervalo de la forma [a,b) y la función no es integrable en [a,b] para cualquier valor arbitrario que se le dé a f en b. A estas integrales se les denomina **integrales impropias de segunda especie**.

En cualquier caso, si se descompone convenientemente el dominio de definición de la función f y se realiza el cambio de x por -x, entonces estas integrales impropias se reducen a sumas de integrales impropias de primera o de segunda especie.

Ejemplo 1

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, donde f posee la gráfica siguiente:

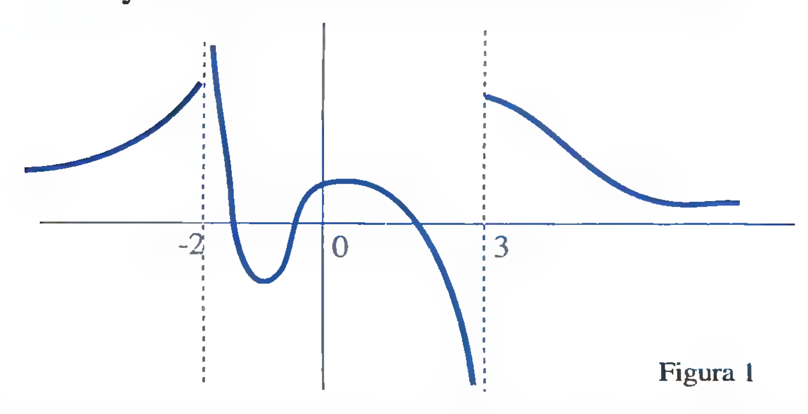


Figura 1

se reduce a suma de integrales impropias de primera y de segunda especie de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{\infty} f(x)\,dx.$$

La integral $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ es una integral impropia de segunda especie y la integral $\int_{3}^{\infty} f(x)\,dx$ es una integral impropia de primera especie. Sin embargo, las integrales $\int_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx$ e $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ no son ni de primera ni de segunda especie.

Si se hace el cambio $x = -t$ en estas dos últimas integrales, entonces se transforman en integrales impropias de primera y de segunda especie respectivamente,

$$\int_{-\infty}^{-2} f(x)\,dx = \int_{2}^{\infty} f(-t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(-t)\,dt\,.$$

Sección

10-1 Definiciones

10-1.1 Definición

Sea el intervalo I de extremos a y b, con a < b, donde a y b pertenecen a la recta real ampliada (pueden ser números reales o infinitos). Este intervalo I puede ser abierto, cerrado o semicerrado, es decir (a,b), [a,b], [a,b) ó (a,b].

Sea $f:I \to \mathbf{R}$ una función definida en este intervalo I. La función f es una **función localmente integrable** en I si y sólo si la función f es integrable en cualquier intervalo compacto[c,d] contenido en I.

Ejemplo 2

Cualquier función continua sobre un intervalo I es una función localmente integrable. Si [c,d] es un intervalo compacto contenido en I, entonces la función f es continua en [c,d]. Además, f es una función integrable en [c,d], por el Corolario 7-2.2.

Observación: La función Ln x y la función $\frac{1}{x^p}$ son funciones localmente integrables en $(0,+\infty)$ y, también, la función e^x es una función localmente integrable en $(-\infty,+\infty)$. Estas no son funciones integrables Riemann en esos dominios.

10-1.2 Definición

Sean $I = [a,+\infty)$ y $f:I \to \mathbf{R}$ una función localmente integrable. Se considera la función $J:I \to \mathbf{R}$ definida por

$$J(u) = \int_a^u f(t)\,dt\,, \qquad \text{para todo } u \in I.$$

Si existe el límite

$$\lim_{u \to \infty} J(u) = V\,, \qquad \text{con } V \in [-\infty,+\infty],$$

entonces al valor V se le denomina **integral impropia de primera**

especie de f en I y se denota por $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ o $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$.

Es decir, $$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{u\to\infty} \int_a^{u} f(t)\,dt\,.$$

Además:

Si V es un valor finito, entonces se dice que la integral impropia de primera especie es convergente.

Si V es $-\infty$ ó $+\infty$, entonces se dice que la integral impropia de primera especie es divergente.

Observación: El límite $\lim_{u\to\infty} \int_a^{u} f(t)\,dt$ puede no existir. Por ejemplo, $\lim_{u\to\infty} \int_a^{u} \text{sen}(t)\,dt$ no existe.

Ejemplo 3

La integral $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ es una integral impropia de primera especie convergente, puesto que

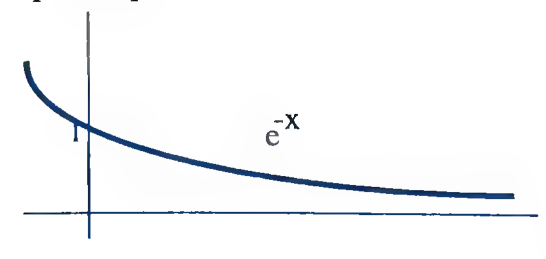


Figura 2

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{u\to\infty} \int_0^{u} e^{-x}dx = \lim_{u\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^u = \lim_{u\to\infty} \left(1-e^{-u}\right) = 1.$$

Ejemplo 4

La integral $\int_0^{\infty} 1\,dx$ es una integral impropia de primera especie divergente, puesto que

$$\int_0^{\infty} 1\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_0^{u} 1\,dx = \lim_{u\to\infty} (u-0) = +\infty\,.$$

Observación: No siempre una expresión integral como $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es una integral impropia. Existen funciones muy conocidas que no tienen integral impropia como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

La integral $\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$ no existe, pues no se trata de una integral impropia al no existir el límite correspondiente.

Para ver esto observemos que la función $\operatorname{sen} x$ es periódica.

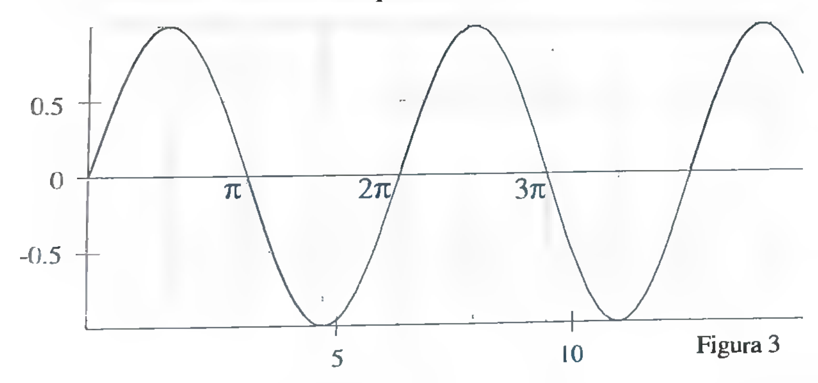


Figura 3

Por la periodicidad de la función $\operatorname{sen} x$ se tiene que $J(2k\pi) = 0$ y $J((2k+1)\pi) = 2$ para todo $k \in \mathbf{Z}$, por lo que J(u) varia entre 0 y 2 si u tiende a $+\infty$. Luego, no existe el límite de la función J(u) cuando u tiende a $+\infty$, es decir, $\lim_{u \to \infty} \int_0^u \operatorname{sen}(t)\,dt$ no existe.

Ejemplo 6

La integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ es una integral impropia de primera especie convergente. Para ver esto consideramos la función

$$J(u) = \int_1^u \frac{1}{x^2}dx = -x^{-1}\Big|_{x=1}^{u} = 1 - u^{-1},$$

y calculamos el límite de $J(u)$ cuando u tiende a ∞

$$\lim_{u \to \infty} (1 - u^{-1}) = 1.$$

Luego, $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Ejemplo 7

La integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ es una integral impropia de primera especie divergente, puesto que

$$J(u)=\int_1^u \frac{1}{x}dx = \text{Ln}(u) - \text{Ln}(1) = \text{Ln}(u)$$

e

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{u \to \infty} J(u) = \lim_{u \to \infty} \text{Ln}(u) = \infty.$$

Observación: La integral de una función $f:(-\infty,a]\to\mathbf{R}$ localmente integrable se define de manera análoga al caso anterior. Se define la función haciendo $J:(-\infty,a]\to\mathbf{R}$ de la forma

$$J(u) = \int_u^a f(t)\,dt$$

y si existe el límite $\lim_{u \to -\infty} \int_u^a f(t)\,dt = V$, con $V \in [-\infty,+\infty]$, entonces

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,dt = \lim_{u \to -\infty} \int_u^a f(t)\,dt.$$

Este caso se reduce al otro mediante el cambio de variable $t = -x$,

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,dt = \int_{-a}^\infty f(-x)\,dx.$$

A la integral $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ se la denomina integral impropia de primera especie también.

10-1.3 Definición

Sean $I = [a,b)$ y $f:I\to\mathbf{R}$ una función localmente integrable. Se considera la función $J:I\to\mathbf{R}$ definida por

$$J(u) = \int_a^u f(t)\,dt, \quad \text{para todo } u \in I.$$

Si existe el límite $\lim_{u \to b^-} J(u) = V$, con $V \in [-\infty, +\infty]$, entonces al valor V se le denomina **integral impropia de segunda especie** de f en I y se denota por

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Es decir, $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(t)\,dt$.

Si V es un número real, entonces se dice que la integral impropia de segunda especie es convergente.

Si V es $-\infty$ ó $+\infty$, entonces la integral impropia de segunda especie es divergente.

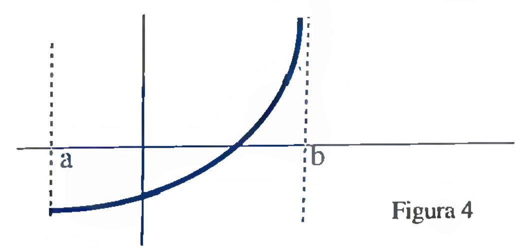


Figura 4

Ejemplo 8

Para estudiar la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{tg}x\,dx$ consideramos la función

$$J(u) = \int_0^u \text{tg}x\,dx, \quad \text{para todo } u \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

La función tg x es una función continua en $[0, \frac{\pi}{2})$, por tanto, es una función localmente integrable en dicho intervalo.

$$\lim_{u \to (\frac{\pi}{2})^-} J(u) = \lim_{u \to (\frac{\pi}{2})^-} \int_0^u \text{tg}x = \lim_{u \to (\frac{\pi}{2})^-} -\text{Ln}(\cos x)\Big|_0^u =$$

$$= \lim_{u \to (\frac{\pi}{2})^-} -\text{Ln}(\cos u) = \infty.$$

Luego, la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$ es una integral impropia de segunda especie divergente.

Ejemplo 9

La integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ es una integral impropia de segunda especie convergente, puesto que si consideramos la función

$$J(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = -2\sqrt{1-t}\Big|_0^u = -2\sqrt{1-u}+2 \,,$$

resulta que $\lim\limits_{u \to 1^-} J(u) = \lim\limits_{u \to 1^-} (-2\sqrt{1-u}+2) = 2$.

Observación: La integral $\int_a^b f(t)\, dt$, donde $f:(a,b] \to \mathbf{R}$ es una función localmente integrable, se define de forma análoga.

En este caso la función $J:(a,b] \to \mathbf{R}$ se define de la forma

$$J(u) = \int_u^b f(t)\, dt \,, \quad \text{para todo } u \in (a,b],$$

y debe existir el límite

$$\lim_{u \to a^+} \int_u^b f(t)\, dt = V, \quad \text{con } V \in [-\infty,+\infty].$$

Así pues, $$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(t)\, dt \,.$$

Estas integrales se reducen al caso anteriormente visto al realizar el cambio de variable $t = -x$,

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\, dx.$$

A estas integrales se les denomina, igualmente, integrales impropias de segunda especie.

10-1.4 Definición

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$, donde $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbf{R}$ es una función localmente integrable en $(-\infty,+\infty)$, y la integral $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$, donde $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ es una función localmente integrable, se definen de la siguiente forma:

Elegido un punto cualquiera del interior $c\in(-\infty,+\infty)$ ó $c\in(a,b)$ respectivamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\,dt,$$

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt = \int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b} f(t)\,dt.$$

Estas definiciones son independientes del punto c elegido. Veámoslo en el primer caso.

Sea $c'\in(-\infty,+\infty)$ otro punto distinto del c, pudiendo suponer sin perdida de generalidad que $c'<c$, entonces

$$\int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{v\to-\infty}\int_{v}^{c} f(t)\,dt + \lim_{u\to\infty}\int_{c}^{u} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_{v\to-\infty}\left(\int_{v}^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^{c} f(t)\,dt\right) + \lim_{u\to\infty}\left(\int_{c'}^{u} f(t)\,dt - \int_{c'}^{c} f(t)\,dt\right) =$$

$$= \lim_{v\to-\infty}\int_{v}^{c'} f(t)\,dt + \lim_{u\to\infty}\int_{c'}^{u} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^{\infty} f(t)\,dt.$$

De forma análoga se comprueba el segundo caso.

Sección

10-2 Criterio general de convergencia

A veces no es posible calcular una función primitiva de una función localmente integrable y no se puede estudiar directamente el valor de la integral impropia correspondiente. En estos casos conviene utilizar algún criterio que asegure la convergencia de la integral impropia para hallarla aproximadamente mediante métodos numéricos.

Los siguientes teoremas muestran condiciones necesarias y suficientes para que una integral impropia sea convergente.

10-2.1 Criterio de Cauchy para integrales impropias de primera especie.

Sean $I = [a,+\infty)$ y $f: I \to \mathbf{R}$ una función localmente integrable.

La integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es integral impropia convergente si y sólo si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe $k_\varepsilon \in (a,+\infty)$ tal que $\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$ para cualesquiera x, y tales que $k_\varepsilon \leq x \leq y \leq +\infty$.

Demostración

Es condición necesaria: Supuesto que la integral es convergente, entonces existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $\lim\limits_{u \to \infty} \int_a^u f(t)\,dt = \alpha$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $k_\varepsilon > a$ tal que para todo $u \geq k_\varepsilon$ se tiene que

$$\left|\int_a^u f(t)\,dt - \alpha\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente, si $k_\varepsilon \leq x \leq y$ entonces

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^y f(t)\,dt - \alpha + \alpha - \int_a^x f(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_a^y f(t)\,dt - \alpha\right| + \left|\int_a^x f(t)\,dt - \alpha\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es una condición suficiente: Supuesto que se verifica la condición, entonces para cada número natural n se define

$$\alpha_n = \int_a^{a+n} f(t)\, dt .$$

La sucesión de números reales (α_n) es una sucesión de Cauchy, puesto que, dado el número real $\varepsilon > 0$ y los números naturales n y m tales que $n > m > k_\varepsilon - a$, se tiene que $|\alpha_n - \alpha_m| = \left|\int_{a+m}^{a+n} f(t)\, dt\right| \leq \varepsilon$, ya que $a+n > a+m > k_\varepsilon$. Por consiguiente, la sucesión (α_n) tiene límite, que denotamos por $\alpha \in \mathbf{R}$.

Comprobemos que $\lim_{u \to \infty} \int_a^u f(t)\, dt = \alpha$.

Dado el número real $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε tal que para todo $n \geq n_\varepsilon$ se cumple que $|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $n \geq n_\varepsilon$, $a + n \geq k_\varepsilon$, entonces

$$\left|\int_a^u f(t)\, dt - \alpha\right| \leq \left|\int_a^u f(t)\, dt - \alpha_{n_1}\right| + \left|\alpha_{n_1} - \alpha\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_a^u f(t)\, dt - \int_a^{a+n_1} f(t)\, dt\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \left|\int_{a+n_1}^u f(t)\, dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $n_1 \geq n_\varepsilon$, $a + n_1 \geq k_\varepsilon$ y si además $u \geq k_\varepsilon$, entonces

$$\left|\int_a^u f(t)\, dt - \alpha\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así pues, la integral $\int_a^\infty f(t)\, dt$ es integral impropia convergente.

Observación: Este criterio establece que fijada una cantidad tan pequeña como se quiera $\varepsilon > 0$, existe un k_ε tal que el área delimitada por la gráfica de la función y el eje OX correspondiente a cualquier subintervalo cerrado y acotado $[x,y] \subset [k_\varepsilon, +\infty)$ es menor que ε.

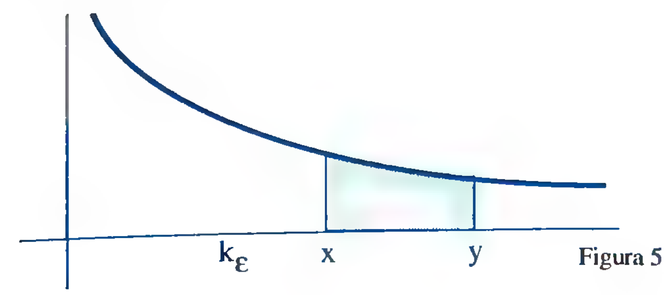


Figura 5

Además, el lector no debe concluir que el criterio anterior implica que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Esta no es condición necesaria ni suficiente. Se puede ver en el Ejemplo 7 que esta condición no es suficiente.

10-2.2 Criterio de Cauchy para integrales impropias de segunda especie.

Sea $f:[a,b)\to\mathbf{R}$ una función localmente integrable.

La integral $\int_a^b f(t)\,dt$ es una integral impropia convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que si $a+\eta \le x < y < b$, entonces

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le \varepsilon .$$

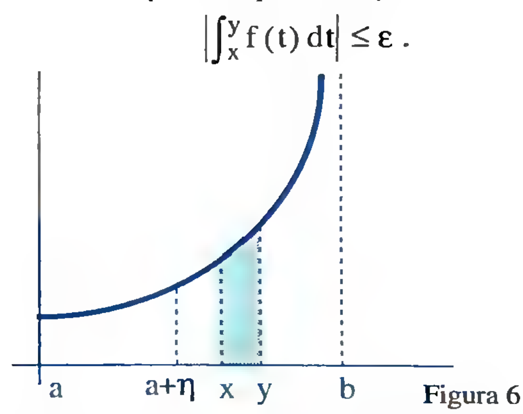


Figura 6

La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 10-2.1.

10-2.3 Proposición

Sean $a > 0$ y $\alpha > 0$. La integral $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si y sólo si $\alpha > 1$.

Demostración

Si $\alpha = 1$: $\int_a^u \frac{1}{x}dx = \mathrm{Ln}(u) - \mathrm{Ln}(a)$, entonces $\lim_{u\to\infty}\int_a^u \frac{1}{x}dx = \infty$.

Si $\alpha \ne 1$: $\int_a^u \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{u^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$, puede ocurrir:

$\alpha > 1$, $\lim_{u\to\infty}\int_a^u \frac{1}{x^\alpha}dx = -\frac{1}{(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{a^{\alpha-1}}$, puesto que,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u^{\alpha-1}} = 0.$$ Luego, la integral converge.

$$\alpha<1,\ \lim_{u\to\infty}\int_a^u \frac{1}{x^\alpha}dx = -\frac{1}{(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{a^{\alpha-1}} +$$

$$+\frac{1}{(1-\alpha)}\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u^{\alpha-1}} = \infty.$$ Luego, la integral diverge.

10-2.4 Proposición

Sean $b>a>0$ y $\alpha>0$. La integral $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ converge si y sólo si $\alpha<1$.

Demostración

Si se considera la función $J(u)=\int_a^u \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ y se hace el cambio de variable $y=\frac{1}{b-x}$, es decir, $x=b-\frac{1}{y}$ y $dx=\frac{1}{y^2}dy$, se tiene:

$$J(u)=\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{b-u}}\frac{1}{y^{-\alpha+2}}dy.$$

Así pues,

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{u\to b^-}\int_a^u \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx=$$

$$= \lim_{u\to b^-}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{b-u}}\frac{y^\alpha}{y^2}dy = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty}\frac{1}{y^{2-\alpha}}dy.$$

Luego, esta integral converge si y sólo si $2-\alpha>1$, es decir, $1>\alpha$.

Observación: Las funciones de las dos últimas proposiciones son funciones "test" para comparar con otras funciones y deducir de estas

últimas la convergencia o divergencia de las correspondientes integrales. Análogos criterios son válidos para los casos siguientes:

1. Sean $a<0$ y $\alpha>0$. La integral $\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ converge si y sólo si $\alpha>1$.

2. Sean $0>b>a$ y $\alpha>0$. La integral $\int_{a}^{b}\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx$ converge si y sólo si $\alpha<1$.

Estos casos se reducen a los de la Proposición 10-2.3 y la Proposición 10-2.4 mediante elementales cambios de variable.

Ejemplo 10

La integral $\int_{a}^{\infty}e^{-tx}dx$ con $-\infty<a<+\infty$ es convergente si $t>0$ y divergente si $t\leq 0$.

En efecto, $J(u) = \int_{a}^{u}e^{-tx}dx = -\frac{1}{t}e^{-tx}\Big|_{a}^{u} = \frac{-e^{-tu}}{t}+\frac{e^{-at}}{t}$,

además, $\lim_{u\to\infty} J(u) = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{-e^{-tu}}{t}+\frac{e^{-at}}{t}\right)$.

Si $t>0$, entonces $\lim_{u\to\infty}\frac{-e^{-tu}}{t} = 0$. Por tanto,

$$\int_{a}^{\infty}e^{-tx}dx = \frac{e^{-at}}{t},$$

es decir, se trata de una integral impropia convergente.

Si $t\leq 0$, entonces $\lim_{u\to\infty}\frac{-e^{-tu}}{t} = \infty$. Por tanto,

$$\int_{a}^{\infty}e^{-tx}dx = \infty,$$

es decir, se trata de una integral impropia divergente.

Sección

10-3 Criterios de convergencia para integrales de primera especie de funciones no negativas

A continuación establecemos criterios para averiguar cuando una integral impropia de primera especie de una función no negativa es convergente.

10-3.1 Teorema

Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ una función localmente integrable tal que $f(x)\geq 0$.

La integral $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ converge si y sólo si la función $J(u) = \int_a^u f(t)\,dt$ está acotada.

Demostración

Si f es una función no negativa, entonces J(u) es una función creciente. En efecto, si $u_1 \leq u_2$ entonces $J(u_2) - J(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} f(t)\,dt \geq 0$, luego $J(u_2) \geq J(u_1)$.

Si existe $\lim_{u\to\infty} J(u)$ y es finito, entonces la función J(u) es acotada. Además, supuesto que la función J(u) es acotada, entonces existe

$$\alpha = \sup\{J(u): u \geq a\} < +\infty.$$

Ocurre que $\alpha = \lim_{u\to\infty} J(u)$ ya que $\alpha \geq J(u)$ para todo $u \geq a$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $u_0 \in \mathbf{N}$ tal que $u_0 \geq a$ y $J(u) \geq \alpha - \varepsilon$ si $u \geq u_0$.

Luego, $\alpha - J(u) \leq \alpha - J(u_0) \leq \varepsilon$, y $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ es convergente.

Observación: Como se hace notar en la demostración anterior, si la función f es no negativa, entonces la función $J(u) = \int_a^u f(t)\,dt$ es creciente. Este hecho debe tenerse presente en este apartado porque es justamente el hecho fundamental de los resultados.

Observación: Seguidamente, se estudian criterios suficientes de convergencia de integrales impropias de primera especie de funciones

f no negativas.

El primero de ellos es muy intuitivo ya que dadas dos funciones no negativas f y g tales que la gráfica de la función g esté por encima de la de la función f, es decir, $g(t) \geq f(t)$, se observa gráficamente, que la convergencia de $\int_a^\infty g(t)\,dt$ implica la convergencia de $\int_a^\infty f(t)\,dt$, y que la divergencia de esta última implica la divergencia de la primera.

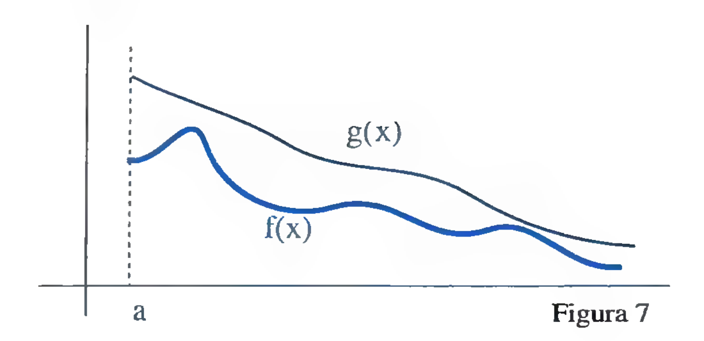


Figura 7

10-3.2 Criterio de comparación.

Sean f, g:[a,+∞)→R dos funciones localmente integrables tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Si $\int_a^\infty g(t)\,dt$ es convergente, entonces $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es convergente.

Si $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es divergente, entonces $\int_a^\infty g(t)\,dt$ es divergente.

Demostración

Se consideran las funciones $J(u) = \int_a^u f(t)\,dt$ y $M(u) = \int_a^u g(t)\,dt$ para $u > a$. Estas funciones cumplen que $J(u) \leq M(u)$ para $u > a$.

Si $\int_a^\infty g(t)\,dt$ es convergente, entonces M(u) es una función acotada. y como $J(u) \leq M(u)$ para todo u, J(u) también es una función acotada.

Al aplicar el Teorema 10-3.1 se obtiene la convergencia de la integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$.

Si $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es divergente, entonces J(u) no es una función acotada, y como $J(u) \leq M(u)$, resulta que la función M(u) no está acotada. Por consiguiente, la integral $\int_a^\infty g(t)\,dt$ es divergente.

Ejemplo 11

Estudiamos la integral de Euler-Poisson $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

En el intervalo [0,1], la función e^{-x^2} es continua y, además, $\int_0^1 e^{-x^2} dx < +\infty$. Así pues, no se presenta ningún inconveniente en el intervalo [0,1], por tanto, se estudia la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$.

En $[1,+\infty)$ se tiene que $e^{-x^2} \le e^{-x}$ y $\int_1^{\infty} e^{-x} = -e^{-x}\Big|_1^{\infty} = e^{-1} < +\infty$.

Luego,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \le \int_0^1 e^{-x^2} dx + e^{-1},$$

y la integral es convergente.

Ejemplo 12

Estudiamos la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

La función $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ es localmente integrable en $[1,+\infty)$ por ser una función continua. Además, esta acotada por $\frac{1}{x^{3/2}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \le \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$ y ocurre que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \left. \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{1}{2}} \right|_1^{\infty} = -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^{\infty} = 2-0 = 2.$$

Como $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ tiene integral impropia convergente, entonces la integral $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ es también convergente por el criterio de comparación.

Ejemplo 13

Estudiamos el carácter de la integral $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[7]{x^5+5}}$ utilizando el criterio de comparación.

La función $\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^5+5}}$ es localmente integrable en $[1,+\infty)$ por tratarse de una función continua en dicha semirrecta, puesto que el denominador no se anula en ella.

El integrando esta minorado por

$$\frac{1}{\sqrt[7]{x^5+5}} = \frac{1}{\sqrt[7]{x^5\left(1+\dfrac{5}{x^5}\right)}} \geq \frac{1}{\sqrt[7]{6}\; x^{\frac{5}{7}}} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{5}{7}}},$$

puesto que $1+\dfrac{5}{x^5} \leq 6$ en $[1,+\infty)$, $\sqrt[7]{1+\dfrac{5}{x^5}} \leq \sqrt[7]{6} \leq 2$ y

$$\frac{1}{\sqrt[7]{1+\dfrac{5}{x^5}}} \geq \frac{1}{\sqrt[7]{6}} \geq \frac{1}{2}.$$

Como $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[7]{x^5}} = \int_1^{\infty} x^{-\frac{5}{7}} dx = \left. \dfrac{x^{-\frac{5}{7}+1}}{\frac{2}{7}} \right|_1^{\infty} = \left. \dfrac{7}{2} x^{\frac{2}{7}} \right|_1^{\infty} = \infty$, es decir,

$\int_1^{\infty} x^{-\frac{5}{7}} dx$ es divergente, entonces la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5+5}}$ es divergente.

10-3.3 Criterio del cociente.

Sean f, g:[a,∞)→**R** dos funciones localmente integrables no negativas, es decir, $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$.

Si $g(t) > 0$ en $[a,\infty)$ y si existe $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = c$, entonces se tiene:

1. Si $c \neq 0$ y $c \neq +\infty$ entonces las integrales impropias relativas a las funciones f y g tienen el mismo carácter, es decir, convergen o divergen simultáneamente.

2. Si $c = 0$ e $\int_a^{\infty} g(t)\, dt$ converge, entonces también converge $\int_a^{\infty} f(t)\, dt$.

3. Si $c = +\infty$ e $\int_a^{\infty} g(t)\, dt$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(t)\, dt$ diverge.

Demostración

1. Supongamos que $c \neq 0$, obviamente $c > 0$ por el signo de f y g. Como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = c,$$

para $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ existe k_ε tal que si $t \geq k_\varepsilon$ entonces $\left|\frac{f(t)}{g(t)} - c\right| \leq \varepsilon$,

luego,

$$\frac{c}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{3c}{2}.$$

Así pues, $\frac{c}{2} g(t) \leq f(t) \leq \frac{3c}{2} g(t)$ para todo $t \geq k_\varepsilon$.

Al aplicar el Teorema 10-3.2, se obtiene que la integral $\int_{k_\varepsilon}^{\infty} f(t)\, dt$ converge, o diverge, si y sólo si la integral $\int_{k_\varepsilon}^{\infty} g(t)\, dt$ converge, ó diverge, por ser f y g funciones localmente integrables.

Como $\int_a^{\infty} f(t)\, dt = \int_a^{k_\varepsilon} f(t)\, dt + \int_{k_\varepsilon}^{\infty} f(t)\, dt,$

entonces la integral $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ converge, ó diverge, si y sólo si $\int_{k_\varepsilon}^{\infty} f(t)\,dt$ converge, ó diverge.

2. Si $c = 0$, para $\varepsilon > 0$ existe k_ε tal que si $t \geq k_\varepsilon$, entonces $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leq \varepsilon$, luego, $0 \leq f(t) \leq \varepsilon g(t)$ con $t \geq k_\varepsilon$.

Por el mismo razonamiento anterior,

si $\int_a^{\infty} g(t)\,dt$ converge, entonces también converge $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$,

si $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ diverge, entonces también diverge $\int_a^{\infty} g(t)\,dt$.

3. Si $c = +\infty$, entonces existe K tal que si $t \geq K$ se verifica que $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| > 1$ y, por tanto, $f(t) \geq g(t)$. Luego,

si $\int_a^{\infty} g(t)\,dt$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ diverge,

si $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ converge, entonces $\int_a^{\infty} g(t)\,dt$ converge.

Observación: Sin duda este criterio es el más usado por su facilidad de comprobación.

Ejemplo 14

Para estudiar el carácter de la integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1}$ y calcular su valor en caso de ser convergente, utilizamos el criterio del cociente con la función e^{-x} en $[0, +\infty)$.

Para calcular el límite del cociente de funciones aplicamos la regla de l'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{e^x + 1}}{\dfrac{1}{e^x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Por tanto, las integrales $\int_0^\infty \frac{1}{e^x + 1} dx$ e $\int_0^\infty \frac{1}{e^x} dx$ tienen el mismo carácter.

Como en el Ejemplo 10 se ha visto que la segunda integral es convergente, entonces la primera integral es convergente. Además su valor es

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + 1} dx = \lim_{u \to \infty} \int_0^u \frac{dx}{e^x + 1} = \lim_{u \to \infty} \mathrm{Ln} \frac{e^x}{e^x + 1}\Bigg|_0^u =$$

$$= \lim_{u \to \infty} \left(\mathrm{Ln} \frac{e^u}{e^u + 1} - \mathrm{Ln} \frac{1}{2} \right) = \lim_{u \to \infty} \mathrm{Ln} \frac{e^u}{e^u + 1} + \mathrm{Ln} 2 = \mathrm{Ln} 2 .$$

Ejemplo 15

Estudiamos el carácter de la integral $\int_3^\infty \frac{x dx}{\sqrt{2x^4 + 3x^2 + 5}}$, utilizando el criterio del cociente con la función test $\frac{1}{x^p}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{2x^4 + 3x^2 + 5}}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x x^p}{\sqrt{2x^4 + 3x^2 + 5}} = M .$$

Si se considera $p = 1$, entonces resulta que $M = \frac{1}{\sqrt{2}}$, por tanto, el caracter de $\int_3^\infty \frac{x dx}{\sqrt{2x^4 + 3x^2 + 5}}$ coincide con el de la integral $\int_3^\infty \frac{1}{x} dx$

que es divergente.

Inicialmente, hace falta comprobar que el denominador no se anula en $[3,+\infty)$, lo que es cierto puesto que la ecuación $2x^4 + 3x^2 + 5 = 0$ no tiene raíces positivas y, por tanto, no se encuentran en $[3,+\infty)$.

Ejemplo 16

Para estudiar el carácter de la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7+5}}$ aplicamos el criterio de comparación.

La función $\frac{1}{\sqrt[5]{x^7+5}}$ es localmente integrable en $[1, +\infty)$ por ser una función continua en este intervalo, pues el denominador no se anula en ese intervalo. Además,

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^7+5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^7\left(1+\frac{5}{x^7}\right)}} \leq \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}},$$

y

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}} = \left.\frac{x^{1-\frac{7}{5}}}{-\frac{2}{5}}\right|_1^{\infty} = \left.-\frac{5}{2}x^{-\frac{2}{5}}\right|_1^{\infty} = \frac{5}{2}, \text{ es decir, } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}} \text{ converge.}$$

Así pues, la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7+5}}$ converge.

Sección

10-4 Convergencia absoluta

Hasta esta sección se ha estudiado el caso de funciones no negativas, pero es útil a veces el estudio de funciones generales. Para esto introducimos el concepto de convergencia absoluta.

10-4.1 Definición

Sea $f:[a,\infty)\to\mathbf{R}$ una función localmente integrable. La integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es absolutamente convergente si la integral $\int_a^\infty |f(t)|\,dt$ es convergente.

De forma análoga se define la convergencia absoluta para las integrales impropias correspondientes a los intervalos $[a, b)$, $(a, b]$ y $(-\infty, b]$.

Esta convergencia es mucho más fuerte que la de la convergencia "simple" estudiada en la sección 10-2 y tiene la ventaja de que la implica, además, mediante este concepto podemos estudiar los casos de funciones con valores en toda la recta real.

Ejemplo 17

La integral $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\,dt$ es absolutamente convergente, puesto que la función verifica

$$\frac{|\operatorname{sen} t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}, \quad \text{para todo } t\in[1,\infty),$$

y, por tanto,

$$\int_1^u \frac{|\operatorname{sen} t|}{t^2}\,dt \leq \int_1^u \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^u = 1-\frac{1}{u},$$

Como $\lim\limits_{u\to\infty} 1-\frac{1}{u} = 1$, entonces $\lim\limits_{u\to\infty}\int_1^u \frac{|\operatorname{sen} t|}{t^2}\,dt \leq 1$.

Ejemplo 18

La integral $\int_0^\infty \operatorname{sen}^m t \cos^n t e^{-t^2} dt$ es absolutamente convergente.

Como $\left|\operatorname{sen}^m t \cos^n t e^{-t^2}\right| \leq e^{-t^2}$, basta probar que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ es convergente. Para ello, se utiliza el criterio del cociente, comparando las funciones e^{-t^2} y $\frac{1}{1+t^2}$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1+t^2}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{2te^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{t^2}} = 0.$$

Además, $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt$ es una integral convergente , pues

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arcotg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Observación: En este último ejemplo es conocida una función primitiva de la función integrando $\frac{1}{1+t^2}$, por lo que se ha podido calcular rápidamente la integral y estudiar su convergencia .

Si no hubiese sido conocida función primitiva alguna, se sigue el siguiente procedimiento para estudiar la convergencia.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2} dt,$$

La integral $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ es un número ya que la función es continua en $[0,1]$, y por tanto integrable.

La integral $\int_1^\infty \frac{1}{1+t^2} dt$ tiene el mismo carácter que $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$, al aplicar el criterio del cociente y obtener como valor del límite 1.

Además, la integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ es convergente como se prueba en la Proposición 10-2.3.

La siguiente proposición prueba que la convergencia absoluta implica la convergencia "simple".

10-4.2 Proposición

Sea $f:[a,\infty) \to \mathbf{R}$ una función localmente integrable.

Si $\int_a^\infty |f(t)|\,dt$ es convergente, entonces $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es convergente.

Demostración

Si $\int_a^\infty |f(t)|\,dt$ converge, por la condición de Cauchy de la Proposición 10-2.1, dado $\varepsilon > 0$ existe k_ε tal que si $k_\varepsilon \le x \le y$ entonces

$$\int_x^y |f(t)|\,dt \le \varepsilon.$$

Además, por las propiedades de la integral, se tiene

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \le \varepsilon,$$

así pues, se cumple la condición de Cauchy para la integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$. Luego, esta integral es convergente.

10-4.3 Criterio de Weierstrass para integrales impropias de primera especie.

Sean $f, g:[a,\infty) \to \mathbf{R}$ dos funciones localmente integrables.

Si $|f(x)| \le g(x)$ para todo $x \in [a,+\infty)$ y la integral $\int_a^\infty g(t)\,dt$ converge, entonces la integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ también converge.

Demostración

Como $0 \le |f(x)| \le g(x)$ para todo $x \in [a,\infty)$, del Criterio de comparación ,10-3.2, resulta que la integral $\int_a^\infty |f|(t)\,dt$ converge y, por tanto, de la Proposición 10-4.2 resulta que $\int_a^\infty f(t)\,dt$ también converge.

Observación: Todos estos argumentos se repiten para funciones no acotadas en intervalos [a,b) ó (a,b], simplemente efectuando modificaciones elementales.

10-4.4 Proposición

Sea $f:[a,b)\to\mathbf{R}$ una función localmente integrable.

Si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ es convergente, entonces $\int_a^b f(t)\,dt$ es convergente.

10-4.5 Criterio de Weierstrass para integrales impropias de segunda especie.

Sean $f, g:[a,b)\to\mathbf{R}$ dos funciones localmente integrables.

Si $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x\in[a,b)$ y la integral $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, entonces la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ también converge.

Sección

10-5 Integrales condicionalmente convergentes de primera especie

Algunas funciones con valores positivos y negativos tienen la propiedad de que la integral en $[a,+\infty)$ es convergente y la integral de su valor absoluto no lo es, es decir, sus integrales impropias son convergentes pero no absolutamente convergentes. El estudio de estas funciones tiene una gran importancia.

10-5.1 Definición

Sea $f:[a,\infty)\to\mathbf{R}$ una función localmente integrable.

Se dice que f es condicionalmente integrable en $[a,\infty)$ si la integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge y la integral $\int_a^\infty |f(t)|\,dt$ no converge.

Un criterio clásico usado para este tipo de integrales es el denominado criterio de Abel que se enuncia de la manera siguiente:

10-5.2 Criterio de Abel.

Sean $f:[a,\infty)\to\mathbf{R}$ una función continua y $g:[a,\infty)\to\mathbf{R}$ una función derivable con $g'(t)$ una función continua en $[a,\infty)$ tales que:

1) Existe $k\geq 0$ tal que $\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\leq k$ para todo $x,y\in[a,\infty)$.

2) $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

3) Existe $M\geq 0$ tal que $\int_x^y |g'(t)|\leq M$ para todo $x,y\in[a,\infty)$.

Entonces la integral $\int_a^\infty f(t)\,g(t)\,dt$ es convergente.

Demostración

Si se considera la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces

$$\int_x^y f(t)\,g(t)\,dt = F(t)\,g(t)\,\Big|_x^y - \int_x^y F(t)\,g'(t)\,dt =$$

$$= F(y)\,g(y) - F(x)\,g(x) - \int_x^y F(t)\,g'(t)\,dt,$$

al integrar por partes.

Si se consideran valores absolutos se tiene que

$$\left|\int_x^y f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq |F(y)\,g(y)| + |F(x)\,g(x)| + \int_x^y |F(t)|\,|g'(t)|\,dt \leq$$

$$\leq k\left(|g(y)| + |g(x)| + \int_x^y |g'(t)|\,dt\right),$$

pues $|F(x)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $C_1 \geq a$ tal que si $x \geq C_1$ se verifica que $|g(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{4k}$.

Sea $\alpha = \sup\{\int_a^x |g'(t)|\,d(t), x \geq a\}$, que es un número por tratarse de un conjunto acotado.

Como $|g'(t)|$ es positivo y $\int_a^x |g'(t)|\,dt$ es creciente, se tiene que $\lim\limits_{x \to \infty} \int_a^x |g'(t)|\,dt = \alpha$, por tanto, existe $C_2 \geq a$ tal que si $x \geq C_2$ entonces

$$\left|\alpha - \int_a^x |g'(t)\,dt|\right| \leq \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Al considerar $k_\varepsilon = \max\{C_1, C_2\}$, si $y \geq x \geq k_\varepsilon$ se tiene que

$$\int_x^y |g'(t)|\,dt \leq \int_a^y |g'(t)|\,dt - \int_a^x |g'(t)|\,dt \leq \alpha - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2k}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2k},$$

por lo tanto,

$$\left|\int_x^y f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2k}\right) \cdot k = \varepsilon.$$

Observación: En la práctica, la condición **3** se sustituye por la siguiente más fuerte:

3') g es monótona decreciente y positiva.

Veamos que **3'** implica **3**.

Si $g(x)$ decrece, entonces $g'(x) < 0$ para todo x, por tanto,

$$\int_x^y |g'(t)|\,dt = \int_x^y -g'(t)\,dt = g(x) - g(y) \leq g(x) \leq g(a) = M.$$

Ejemplo 19

La integral $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}\,t}{t}\,dt$ es convergente. Para ver esto aplicamos el criterio de Abel al considerar las funciones $f(t) = \text{sen}\,t$ y $g(t) = \frac{1}{t}$.

Se verifica que:

1. $\left|\int_x^y \text{sen}\,t\,dt\right| = |\cos x - \cos y| \leq 2$ para todo $x, y \in [1, +\infty)$.

2. $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t} = 0$

3'. $g(t)$ es monótona decreciente y positiva.

Luego, $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}\,t}{t}\,dt$ es convergente.

Sección

10-6 Criterios de convergencia para integrales impropias de segunda especie de funciones no negativas

Los criterios de esta sección son análogos a los de la Sección 10-3 por lo que tan sólo se enuncian los resultados.

10-6.1 Teorema

Sea $f:[a,b) \to \mathbf{R}$ una función localmente integrable y $f(x) \geq 0$.

La integral $\int_a^b f(t)dt$ converge si y sólo si la función $J(u) = \int_a^u f(t)dt$ está acotada.

10-6.2 Criterio de comparación.

Sean $f,g:[a,b) \to \mathbf{R}$ dos funciones localmente integrables tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Entonces:

Si $\int_a^b g(t)dt$ es convergente, entonces $\int_a^b f(t)dt$ es convergente.

Si $\int_a^b f(t)dt$ es divergente, entonces $\int_a^b g(t)dt$ es divergente.

10-6.3 Criterio del cociente.

Sean $f,g:[a,b)\to\mathbf{R}$ dos funciones localmente integrables no negativas. Si $g(t) > 0$ para todo $t \in [a,b)$ y $\lim\limits_{t \to b} \dfrac{f(t)}{g(t)} = c$, se tiene que:

1. Si $c \neq 0$, entonces las dos integrales impropias relativas a las funciones f y g tienen el mismo carácter, es decir, ambas convergen o divergen simultáneamente.

2. Si $c = 0$ y $\int_a^b g(t)dt$ converge, entonces $\int_a^b f(t)dt$ converge.

3. Si $c = +\infty$ y $\int_a^b g(t)dt$ diverge, entonces $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Ejemplo 20

La integral $\int_3^6 \frac{\text{Ln}(x)}{(x-3)^2}dx$, es una integral impropia de segunda especie divergente (en el extremo $x = 3$). En efecto, al aplicar el criterio del cociente, con la función test $\frac{1}{(x-3)^p}$, se tiene,

$$\lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{\text{Ln}(x)}{(x-3)^2}}{(x-3)^{-p}} = \lim_{x \to 3} \frac{\text{Ln}(x)\ (x-3)^p}{(x-3)^2} = \text{Ln}3 \text{ si } p=2 \geq 1.$$

Como $\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^p}dx$ diverge si $p \geq 1$, entonces $\int_3^6 \frac{\text{Ln}(x)}{(x-3)^2}dx$ diverge.

Ejemplo 21

La integral $\int_3^6 \frac{dx}{x^2(x^3-27)^{2/3}}$ es una integral de segunda especie convergente (en el extremo $x = 3$). En efecto, al aplicar el criterio del cociente para la función test $g(x) = (x\text{-}3)^{-p}$ resulta que si $p = \frac{2}{3} < 1$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^p}{x^2(x^3-27)^{2/3}} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^p}{x^2((x-3)\ (x^2+3x+9))^{2/3}} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2(x^2+3x+9)^{2/3}} \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^p}{(x-3)^{2/3}} = \frac{1}{81} \lim_{x \to 3} (x-3)^{p-2/3} = \frac{1}{81}.$$

Como $\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$ converge, entonces $\int_3^6 \frac{dx}{x^2(x^3-27)^{2/3}}$ converge.

Sección
10-7 Integrales Eulerianas

Muchas de las integrales que la técnica nos proporciona son integrales impropias y no es extraño encontrarse con funciones que vienen definidas mediante integrales de este tipo. Tal es el caso que ahora nos atañe. Comenzaremos exponiendo dos ejemplos como aplicación de lo anteriormente desarrollado y con un enorme valor intrínseco en múltiples teorías físicas y matemáticas.

Ejemplo 22 (Función Gamma)

Si $p>0$ la integral impropia $\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ es convergente.

En efecto, $\Gamma(p)$ se puede descomponer en suma de dos integrales impropias

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx+\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = I_1+I_2.$$

La primera es de segunda especie en $x=0$ mientras que la segunda es una integral de primera especie.

Estudiamos $I_1=\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx$ comparándola con $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}x^{p-1}}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0} x^{p+\alpha-1}e^{-x} = 0 \quad \text{si } p+\alpha-1>0, \text{ es decir, } 1\text{-}p<\alpha.$$

Como la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si $\alpha<1$, luego si $1\text{-}p<1$, es decir, si $p>0$, entonces I_1 es convergente.

Estudiamos $I_2=\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ comparándola con $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$;

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x} x^{p-1}}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to \infty} x^{p+\alpha-1} e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{p+\alpha-1}}{e^{x}} = 0,$$

para cualquier valor de p y α. Por consiguiente, I_2 es convergente para cualquier valor de p, tomando $\alpha > 1$.

En consecuencia, $\Gamma(p)$ es convergente si $p > 0$.

10-7.1 Definición

La función gamma $\Gamma:(0,+\infty) \to \mathbf{R}$ se define como

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx.$$

10-7.2 Propiedades de la función gamma

La función Γ tiene las siguientes propiedades:

1. Para todo número real $p > 0$ se verifica que $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$.

2. Para todo un número natural p se verifica que $\Gamma(p) = (p-1)!$.

3. $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\text{sen}\,(p\pi)}$. (Fórmula de los complementos).

Demostración

Demostraremos solamente **1** y **2**, ya que la demostración de **3** sobrepasa los límites de este libro.

1. Al integrar por partes se tiene que

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = -x^p e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty p x^{p-1} e^{-x} dx =$$

$$= p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = p \cdot \Gamma(p).$$

2. Si p es un número natural entonces

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) =$$

$$= (p-1)(p-2)\Gamma(p-2) = \ldots = (p-1)!\Gamma(1).$$

Como $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ se tiene que $\Gamma(p) = (p-1)!$.

Observación: Por una lado se tiene la función $\Gamma(p)$ generaliza la noción de factorial de un número y por otro al usar la fórmula de los complementos se obtiene que $\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$.

Por consiguiente, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Si m es un número natural, entonces

$$\Gamma(m+\frac{1}{2}) = ((m-1)+\frac{1}{2})((m-2)+\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) =$$

$$= (m-1+\frac{1}{2})(m-2+\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

y, por tanto, es fácil calcular el valor de $\Gamma(x)$ para los números racionales positivos x de denominador 2. Por ejemplo, $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Ejemplo 23 (Función Beta)

Si $p>0$ y $q>0$, entonces la integral impropia

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

es convergente.

Esta integral se descompone en suma de dos integrales impropias de segunda especie,

$$\beta(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = I_1+I_2$$

($\frac{1}{2}$ puede ser sustituido por cualquier $a\in(0,1)$).

Al aplicar el criterio del cociente a I_1 utilizando la función test $\frac{1}{x^t}$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}x^t = \lim_{x\to 0}\frac{x^t(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} = 1 \quad \text{si } 1-p=t.$$

Ahora bien, si $t<1$, entonces $\int_0^1 \frac{1}{x^t}dx$ converge. Por tanto I_1 es convergente si $1-p<1$, es decir, si $p>0$.

Al aplicar el criterio del cociente a I_2 utilizando la función test

$\dfrac{1}{(1-x)^t}$ resulta que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{p-1}(1-x)^t}{(1-x)^{1-q}} = 1 \quad \text{si } t = 1\text{-}q.$$

Ahora bien, si $1 > t$, entonces la integral $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{dt}{(1-x)^t}$ es convergente, por tanto, si $1 > 1\text{-}q$, es decir, $q > 0$ se tiene que I_2 es convergente.

10-7.3 Definición

La función beta $\beta(p,q):(0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbf{R}$ se define como

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

para todo p, $q \in (0,+\infty)$.

10-7.4 Propiedades de la función beta

La función β tiene las siguientes propiedades:

1. $\beta(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

2. $\beta(p, q) = \beta(q, p)$.

3. $\beta(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta$.

Demostración

Unicamente demostramos la fórmula establecida en **3** ya que el resultado de **2** es obvio y la demostración de **1** excede los límites de este texto.

3. Al hacer el cambio $x = \text{sen}^2\theta$ resulta que

$$\beta(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2}2\text{sen}\theta\cos\theta d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta.$$

Esta fórmula de la función beta en una integral en senos y cosenos es

de gran utilidad. De ella se puede obtener la igualdad $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Las funciones beta y gamma permiten obtener integrales definidas mediante sencillos cambios, como vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 24

Calculamos $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{25}\theta \cos^{30}\theta \, d\theta$ utilizando las funciones gamma y beta.

Se observa que

$$I = \frac{1}{2}\beta(p,q) \quad \text{con} \quad 2p-1=25 \quad \text{y} \quad 2q-1=30,$$

es decir, $p=13$ y $q=\frac{31}{2}$. Por tanto,

$$\beta(13, \frac{31}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(13)\Gamma(\frac{31}{2})}{\Gamma(\frac{57}{2})} = \frac{1}{2}\frac{12!\,(14+\frac{1}{2})\,(13+\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{(27+\frac{1}{2})\,(26+\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{12!}{(27+\frac{1}{2})\,(26+\frac{1}{2})\ldots(15+\frac{1}{2})} = \frac{4194304}{3000132951160345}.$$

Ejemplo 25

Para calcular la integral general $I = \int_{-a}^{a} (a-x)^{p-1}(a+x)^{q-1}dx$, hacemos primero el cambio $t = a-x$ con $dt = -dx$

$$I = -\int_{2a}^{0} t^{p-1}(2a-t)^{q-1}dt = \int_0^{2a} t^{p-1}(2a-t)^{q-1}dt =$$

$$= (2a)^{q-1}\int_0^{2a} t^{p-1}\left(1-\frac{t}{2a}\right)^{q-1} dt.$$

Ahora hacemos el cambio $z = \frac{t}{2a}$ con $dz = \frac{dt}{2a}$,

$$I = (2a)^{q-1}\int_0^1 z^{p-1}(2a)^{p-1}(1-z)^{q-1}2adz =$$

$$= (2a)^{p+q-1}\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz = (2a)^{p+q-1}\beta(p,q).$$

Para finalizar este capítulo, y como aplicación de todo lo anterior vamos a ver un resultado clásico de gran interés, que es el cálculo de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

La integral indefinida $\int e^{-x^2}dx$ no puede ser calculada en un número finito de pasos en forma de funciones elementales (éste es un profundo teorema matemático), sin embargo, la función gamma permite calcular su integral impropia de $-\infty$ a ∞.

Ejemplo 26

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}.$$

Si en $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$ se hace el cambio $t = s^2$ se tiene que

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} s^{2(p-1)}e^{-s^2}2sds = 2\int_0^{\infty} e^{-s^2}s^{2p-1}ds.$$

En particular, si $p = \frac{1}{2}$ resulta que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-s^2}ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds.$$

por ser e^{-s^2} una función par. Por tanto,

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds.$$

Problemas Propuestos

1) Calcular $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ para $p > 1$. Comprobar que para $p \le 1$ la integral no es convergente.

2) Calcular $\int_0^1 \text{Ln} x dx$.

3) Estudiar en función de p la convergencia de la integral $\int_0^\infty e^{-px} dx$.

4) Estudiar si converge o diverge de la integral $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^7} dx$.

5) Estudiar el carácter de la integral $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)x}}$ y calcularla si es convergente.

6) Supuesta conocida la fórmula $\int_0^\infty \frac{\text{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen} t \cos t}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Aplicar la integración por partes para deducir que $\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

7) Calcular $\int_0^1 \left(\text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^3 dx$.

8) Calcular $\int_0^\infty e^{-x^2} x^5 dx$.

9) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4 x \cos^6 x dx$.

Capítulo 11

Series de Números Reales

El concepto de serie aparece en la Matemática al pretender dar sentido a la suma de los términos de una sucesión de números; ya en el siglo XIV Nicolás de Oresme (ca.1323 -1382) consiguió algunas reglas para la suma de series infinitas.

El problema fundamental es el estudio de la convergencia de una serie, es decir, "la posibilidad de hacer una suma infinita".

Salvo en unos pocos casos, series aritméticas, geométricas, telescópicas ... , aunque sepamos que la serie converge, no sabremos hallar su suma.

La teoría de series que desarrollamos en este capítulo es sin duda uno de los métodos más potentes del Análisis para la construcción de nuevos números y nuevas funciones. De hecho, la forma más usual de aproximar un número real, su expresión decimal, consiste en expresar dicho número real como la suma de una serie muy concreta.

Consideraremos a lo largo de este capítulo el caso de las series de números reales.

Sección

11-1

Definición de Serie. Series convergentes

En las aplicaciones es necesario , a veces, calcular "la suma" de los términos de una sucesión (x_n), así pues, surge el problema de como definir esta suma de términos de una sucesión.

Como la suma en **R** es una operación binaria entonces, a lo más, se sabe sumar un número finito de elementos de **R** al aplicar reiteradas veces la propiedad asociativa de la suma de números reales. Se hace necesario utilizar el concepto de límite asociado a las sumas finitas de términos de una sucesión.

11-1.1 Definición

Sea (x_n) una sucesión de números reales. Se denota por X_n la suma parcial de los n-primeros términos de la sucesión (x_n), es decir,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Se denomina **serie asociada a la sucesión** (x_n) a la sucesión (X_n), y la denotamos por $\sum x_n$.

Ejemplo 1

La serie $\sum n$ asociada a la sucesión (n) se denomina **serie aritmética**, y podemos calcular las sumas parciales X_n. Para ello, procedemos de la siguiente forma:

Escribimos $X_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n,$

$X_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1,$

sumamos $2X_n = (n+1) + (n-1+2) + \ldots + (n-1+2) + (n+1).$

Luego $2X_n = n(n+1)$, y por tanto, $X_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ejemplo 2

La **serie aritmética de diferencia** d, $d > 0$, se obtiene a partir de la sucesión de términos $x_1 = a$ y $x_n = x_{n-1} + d$, es decir,

$$(x_n) = (a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots, a+nd, \ldots).$$

Aplicando un método análogo al del Ejemplo 1,

Escribimos $X_n = a + (a+d) + \ldots + (a+(n-1)d)$,

$X_n = (a+(n-1)d) + \ldots + a$,

sumamos $2X_n = (2a+(n-1)d) + \ldots + (2a+(n-1)d)$.

Luego $$X_n = \frac{n\,(2a+(n-1)\,d)}{2} = n\frac{x_1 + x_n}{2}.$$

Ejemplo 3

Si consideramos una progresión geométrica de razón r, $r > 0$ y $r \neq 1$, se tiene la sucesión (x_n) donde $x_1 = 1$ y $x_n = r\,x_{n-1}$, es decir,

$$(x_n) = (1, r, r^2, \ldots, r^n, \ldots).$$

La serie $\sum r^n$; $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots$, se denomina **serie geométrica de razón** r y podemos calcular las sumas parciales X_n. Para ello, procedemos de la siguiente forma:

Escribimos $X_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}$,

$rX_n = r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n$,

restamos $(1-r)X_n = 1 - r^n$.

Luego $$X_n = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Ejemplo 4

De la serie geométrica $\sum a\,r^n$; $a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^n + \ldots$, podemos calcular las sumas parciales X_n. Para ello, procedemos de

forma análoga al Ejemplo 3:

Escribimos $X_n = a + ar + ar^2 + ... + a r^{n-1}$,

$rX_n = ar + ar^2 + ... + a r^{n-1} + a r^n$,

restamos $(1-r)X_n = a(1-r^n)$.

Luego $X_n = a\dfrac{1-r^n}{1-r}$.

Ejemplo 5

La serie geométrica $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^n} + ...$, de término n-ésimo, $x_n = \frac{1}{3^n}$, es la sucesión de las sumas parciales:

$$X_1 = \frac{1}{3},\ X_2 = \frac{4}{9},\ ...,\ X_n = \frac{1-3^{-n}}{2},\ ...$$

La serie $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{3} + ...$, de término n-ésimo, $x_n = \frac{1}{3}$, es la sucesión de las sumas parciales:

$$X_1 = \frac{1}{3},\ X_2 = \frac{2}{3},\ ...,\ X_n = \frac{n}{3},\ ...$$

Obsérvese que en esta última serie la razón es 1.

11-1.2 Definición

La serie $\sum x_n$ es **convergente** si existe y es finito el límite de la sucesión de sumas parciales (X_n). Al número S, $\lim_n X_n = S$, se le denomina suma de la serie y por abuso del lenguaje se denota

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S \quad \text{o} \quad \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n = S,$$

es decir, $\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n = \lim_n X_n = \lim_n (x_1 + x_2 + ... + x_n)$.

11-1.3 Definición

La serie $\sum x_n$ es **divergente**, si existe y es infinito el límite de la sucesión de sumas parciales (X_n). Es decir, si

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n = \lim_n X_n = +\infty \quad \text{o} \quad \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n = \lim_n X_n = -\infty.$$

Se dice que la serie $\sum x_n$ no es **ni convergente, ni divergente** si no existe el límite de la sucesión de las sumas parciales.

Ejemplo 6

La serie geométrica, $\sum r^n$ cumple:

- Es divergente para $r > 1$, pues $\lim_n X_n = \lim_n \frac{1-r^n}{1-r} = \infty.$

- Es convergente para $1 > r$, pues $\lim_n X_n = \lim_n \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$

- Es divergente para $r = 1$, pues $\lim_n X_n = \lim_n n = \infty$.

Ejemplo 7

La serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, pues como

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

resulta que la suma parcial n-ésima es

$$X_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

y $\lim_n X_n = 1$.

Ejemplo 8

La serie aritmética, $\sum(a+(n-1)d)$, es divergente, pues

$$\lim_n X_n = \lim_n \frac{n(2a+(n-1)d)}{2} = \infty .$$

Ejemplo 9

La serie $\sum x_n$ asociada a la sucesión $(x_n) = (1, -1, 1, -1,...)$, cuyas sumas parciales son $(X_n) = (1, 0, 1, 0,...)$, es una serie no convergente, pues el límite de la sumas parciales no existe.

Observación: Las preguntas fundamentales en el estudio de las series son: ¿Converge la serie?. ¿Cuál es la suma de la serie?.

Dedicamos mayor parte de este capítulo a responder a la primera pregunta dando criterios que la responden. Una vez confirmada la convergencia la suma de una serie puede ser aproximada numéricamente con un ordenador.

La segunda pregunta es dificil de responder y sólo se conoce la respuesta un unos pocos casos y, en general, se emplean sofisticados métodos matemáticos que exceden la capacidad de este libro.

De la observación de la definición de serie convergente se obtienen algunos teoremas y propiedades útiles.

11-1.4 Criterio del término n-ésimo para la convergencia

Una condición necesaria para la convergencia de la serie $\sum x_n$, es que la sucesión (x_n) tienda a cero. Es decir:

Si la serie $\sum x_n$ es convergente, entonces $\lim_n x_n = 0$.

Demostración

Supuesto que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = A$, es decir $\lim_n X_n = A$, y que $A \in \mathbf{R}$, y como $x_n = X_n - X_{n-1}$, entonces se tiene que

$$\lim_n x_n = \lim_n X_n - \lim_n X_{n-1} = A - A = 0.$$

Observación: Esta condición, por ser necesaria, permite determinar los casos de divergencia pero no los de convergencia. Es decir, el teorema no afirma que $\sum x_n$ converja si la sucesión (x_n) converge a 0, sino que la serie diverge si dicha sucesión no converge a cero.

El resultado recíproco de la proposición anterior no es cierto, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10

La serie de término general $\frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$, denominada **serie armónica** por ser cada término x_n el medio armónico de los dos contiguos x_{n-1} y x_{n+1}, verifica que el término general x_n converge a 0 y, sin embargo, la serie diverge, como se ve en el siguiente Ejemplo 11.

En el cuerpo de los números reales que una sucesión sea convergente es equivalente a que dicha sucesión sea de Cauchy. Así pues, que la serie $\sum x_n$ sea convergente equivale a que la sucesión (X_n) sea de Cauchy. Además, al tener en cuenta que $X_m - X_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m$ para $m, n \in \mathbf{N}$ con $m > n$ se tiene el siguiente:

11-1.5 Teorema (Criterio de Cauchy).

La serie $\sum x_n$ es convergente si, y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tal que $|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m| < \varepsilon$ para todo par de números $n, m \in \mathbf{N}$ mayores que n_0.

Ejemplo 11

Con el criterio de Cauchy se comprueba que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, pues para todo $n \in \mathbf{N}$ se verifica que

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

y la condición de convergencia no se verifica para $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

Ejemplo 12

La serie geométrica de razón $\frac{1}{3}$, $\Sigma \frac{1}{3^n}$, converge, pues al aplicar el criterio de Cauchy, con $m = n + k$, se observa que

$$x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+k}} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^k}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

Como $\left| \frac{1 - \frac{1}{3^k}}{1 - \frac{1}{3}} \right| = \left| \frac{3}{2} \cdot \frac{3^k - 1}{3^k} \right| = \frac{3}{2} \cdot \left| \frac{3^k - 1}{3^k} \right| < \frac{3}{2}$, para todo k, y la sucesión $(\frac{1}{3^n})$ converge a cero; dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que $\left| \frac{1}{3^n} \right| < \frac{2\varepsilon}{3}$, entonces

$$|x_n + \ldots + x_{n+k}| < \left| \frac{1}{3^n} \right| \cdot \frac{3}{2} < \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \frac{3}{2} = \varepsilon \text{, para } n > n_0 \text{ y cualquier k.}$$

11-1.6 Teorema

Si Σx_n y Σy_n son series convergentes y $\lambda, \gamma \in \mathbf{R}$, entonces la serie $\Sigma(\lambda x_n + \gamma y_n)$ es convergente. Además, se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n + \gamma y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Esto es consecuencia inmediata de la Definición 11-1.2 y de la Proposición 2-3.1.

Sección

11-2

Series de términos no negativos

11-2.1 Definición

La serie de números reales $\sum x_n$ es de términos no negativos (positivos), si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$ ($x_n > 0$, respectivamente).

La serie de números reales $\sum x_n$ es de términos no positivos, (negativos) si $x_n \leq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$ ($0 > x_n$, respectivamente).

Al cambiar el signo a todos los términos de una serie de términos negativos, se obtiene una de términos positivos, así pues, se estudia la convergencia de las series de términos positivos.

Observación: La importancia de las series de términos no negativos se debe a que la sucesión de sumas parciales es creciente y por tanto posee límite, finito o infinito, y este límite coincide con el supremo de (X_n); admitiendo que si (X_n) no está acotada el supremo es $+\infty$.

11-2.2 Teorema

Una serie de términos no negativos, $\sum x_n$, o converge o diverge a $+\infty$.

Demostración

La sucesión de las sumas parciales (X_n) es creciente. Si (X_n) está acotada, entonces (X_n) converge, es decir, posee límite finito. Si (X_n) no está acotada, entonces su límite es $+\infty$.

11-2.3 Criterios de comparación

Sean $\sum x_n$, $\sum y_n$ dos series de términos no negativos.

a) **Primer criterio de comparación**: Si existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \leq y_n$, para todo $n \geq n_0$, entonces:

Si $\sum y_n$ converge, entonces $\sum x_n$ converge.

Si $\sum x_n$ diverge, entonces $\sum y_n$ diverge.

b) **Segundo criterio de comparación**: Sea $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \lambda$,

Si $\lambda \in (0, +\infty)$, entonces las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ poseen el mismo carácter. Es decir:

$\sum x_n$ converge si y sólo si $\sum y_n$ converge.

$\sum x_n$ diverge si y sólo si $\sum y_n$ diverge.

Si $\lambda = 0$ y la serie $\sum y_n$ converge, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

Si $\lambda = +\infty$ y la serie $\sum y_n$ diverge, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Demostración

a) Si (X_n) e (Y_n) son las sumas parciales de las series $\sum x_n$ y de $\sum y_n$ respectivamente, se tiene que $X_n \leq Y_n$ para todo $n \geq n_0$. Luego:

Si la sucesión (Y_n) está acotada superiormente, entonces también lo está la sucesión (X_n). Si la sucesión (X_n) no está acotada superiormente, entonces tampoco lo está la (Y_n).

b) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq +\infty$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica

$$\frac{1}{2}\lambda \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{3}{2}\lambda,$$

por consiguiente, las series $\sum x_n$, $\sum \frac{1}{2}\lambda y_n$ y $\sum \frac{3}{2}\lambda y_n$ tienen el mismo carácter, pues se puede aplicar dos veces el primer criterio de comparación. Además, al considerar $\sum \frac{1}{2}\lambda y_n = \frac{1}{2}\lambda \sum y_n$ y $\sum \frac{3}{2}\lambda y_n = \frac{3}{2}\lambda \sum y_n$, entonces se ve que $\sum x_n$, $\sum y_n$ tienen el mismo carácter.

Si $\lambda = 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $\frac{x_n}{y_n} \leq 1$, o lo que es lo mismo, $x_n \leq y_n$. Basta aplicar el primer criterio.

Si $\lambda = +\infty$, cada número $H > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $H \leq \frac{x_n}{y_n}$, o lo que es lo mismo, $H \cdot y_n \leq x_n$. Basta aplicar

el primer criterio de comparación y observar que $\sum H \cdot y_n = H \cdot \sum y_n$.

Observación: Una regla nemotécnica para el primer criterio de comparación para series de términos positivos es:

Si la serie "pequeña" es divergente, la serie "grande" también lo es.

Si la serie "grande" es convergente, la "pequeña" también converge.

En el segundo criterio de comparación, si $\lambda = 0$ y la serie $\sum y_n$ es divergente, no se puede afirmar nada sobre el carácter de la serie $\sum x_n$, como muestran los siguientes casos:

Si $x_n = 0$ e $y_n = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces $\lambda = 0$, $\sum x_n$ converge y $\sum y_n$ diverge.

Si $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces $\lambda = 0$, $\sum x_n$ diverge y $\sum y_n$ diverge.

Ejemplo 13

La serie $\sum \frac{1}{n!}$ converge, pues está mayorada por la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$, que, por ser de razón menor que 1, converge.

Ejemplo 14

Si $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces la serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ es divergente. Como $n^\alpha \leq n$ y $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$, entonces esta serie está minorada por la serie armónica, $\sum \frac{1}{n}$, que es divergente como se ve en el Ejemplo 11.

Ejemplo 15

La serie $\sum \frac{2}{1+3^n}$ converge, pues al compararla con la serie $\sum \frac{1}{3^n}$, que es una serie geométrica convergente, se tiene

$$\lim_n \frac{\frac{2}{1+3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_n \frac{2 \cdot 3^n}{1+3^n} = 2.$$

Ejemplo 16

La serie $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ diverge, pues al compararla con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$, que es divergente, se tiene $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \lim_n \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1$.

11-2.4 Convergencia de p-series

La serie $\sum \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$ y diverge para $0 \leq p \leq 1$.

Demostración

Sea $p > 1$;

$$\sum \frac{1}{n^p} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots \leq$$

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{8^p}\right) + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^k}.$$

La serie, $\sum \frac{1}{(2^{p-1})^k}$, que es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2^{p-1}}$ y esta razón es menor que 1, es convergente y la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ es creciente y acotada por $1 + \sum \frac{1}{(2^{p-1})^k}$. Luego, la p-serie es convergente también.

Si $0 \leq p \leq 1$, entonces la p-serie diverge se ve en el Ejemplo 14.

Observación: El segundo criterio de comparación es muy útil en el estudio de la convergencia de ciertas series algebraicas. Se comparan dichas series con una p-serie adecuada, es decir, una cuyo término general sea de igual grado que el de la serie dada. Por ejemplo, la serie $\sum \frac{\sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n}+1}$ se compara con la serie $\sum \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Sección

11-3

Criterios de convergencia para series de términos no negativos

Aplicar un criterio de comparación requiere el conocimiento previo de algunas series convergentes y divergentes. Al comparar con las series geométricas de razón menor que la unidad, que son series convergentes, resultan el criterio del cociente y el de la raíz.

11-3.1 Criterio de la raíz o de Cauchy

Sean (x_n) una sucesión de números reales no negativos y

$$\alpha = \limsup \sqrt[n]{x_n} = \inf \{\{\sup \sqrt[n]{x_n} : n \geq m\} : m \in \mathbf{N}\}.$$

Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

Si $\alpha > 1$, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Demostración

Si $\alpha < 1$ y β es un número real tal que $\alpha < \beta < 1$, entonces existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ para el que se verifica $\sqrt[n]{x_n} < \beta$ para todo $n \geq n_0$ por ser α el límite superior. Así pues, $x_n < \beta^n$ para todo $n \geq n_0$.

La convergencia de $\sum x_n$ se obtiene con el primer criterio de comparación, pues la serie geométrica $\sum \beta^n$ converge al ser $0 < \beta < 1$.

Si $\alpha > 1$, entonces existen infinitos términos x_n tales que $\sqrt[n]{x_n} > 1$, o lo que es lo mismo, $x_n > 1$, en virtud de la definición de límite superior.

Como no se cumple la condición de que el término general de la serie tienda a 0, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Observación: Si $\alpha = 1$, entonces el criterio no aporta información.

11-3.2 Corolario (Criterio de la Raíz o de Cauchy)

Sea (x_n) una sucesión de números reales no negativos tal que existe

$$\alpha = \lim \sqrt[n]{x_n}.$$

Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

Si $\alpha > 1$, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Observación: Si $\alpha = 1$, entonces el criterio no aporta información.

Ejemplo 17

La serie $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ converge, pues $\lim_n \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 18

La serie $\sum n \cdot 2^n$ diverge, pues $\lim_n \sqrt[n]{n \cdot 2^n} = 2 \lim_n \sqrt[n]{n} = 2$.

Ejemplo 19

El criterio de la raíz no aporta información al estudio de la serie $\sum \frac{1}{n}$, que es una serie divergente, puesto que $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$.

Tampoco aporta información al estudio de la serie $\sum \frac{1}{n^2}$, que es convergente, puesto que $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

11-3.3 Criterio del cociente o de D´Alembert

Sean (x_n) una sucesión de números reales no negativos,

$$\alpha = \lim\sup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \inf\{\{\sup\{\frac{x_{n+1}}{x_n} : n \geq m\} : m \in N\}$$

y

$$\beta = \liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sup\{\{\inf\{\frac{x_{n+1}}{x_n} : n \geq m\} : m \in N\}.$$

Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

Si $\beta > 1$, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Demostración

Si $\alpha < 1$ y γ es un número real tal que $\alpha < \gamma < 1$, entonces existe un número natural $p \in N$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \gamma$ para todo $n \geq p$, por ser α el límite superior. Así pues,

$$x_{p+1} \leq x_p\gamma \quad , \quad x_{p+2} \leq x_{p+1}\gamma \leq x_p\gamma^2 \quad y \quad x_{p+m} \leq x_p\gamma^m,$$

para todo $m \in N$. Luego para todo $n \geq p$ se tiene

$$x_n \leq a\gamma^n, \quad \text{donde } a = x_p\gamma^{-p}.$$

La convergencia de la serie $\sum x_n$ se sigue del primer criterio de comparación, pues la serie $\sum \gamma^n$ converge al ser $0 < \gamma < 1$.

Si $\beta > 1$ y λ es un número real tal que $1 < \lambda < \beta$, entonces existe $p \in N$ tal que es $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \lambda \geq 1$ para todo $n \geq p$, en virtud de la definición de límite inferior,

Como los términos x_n de la serie a partir de x_p son mayores o iguales que x_p, entonces no se cumple la condición $\lim_n x_n = 0$, necesaria para la convergencia de $\sum x_n$, por tanto la serie diverge.

Observación: Si es $\beta < 1 < \alpha$, el criterio no aporta información.

11-3.4 Corolario (Criterio del cociente o de D´Alembert).

Sea (x_n) una sucesión de números reales no negativos tal que existe

$$\alpha = \lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

Si $\alpha > 1$, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Observación: Si es $\alpha = 1$, el criterio no aporta información.

El criterio del cociente es de gran utilidad en el estudio de la convergencia de las series llamadas "de convergencia rápida", por ejemplo, las series que comprenden exponenciales o factoriales.

Ejemplo 20

La serie $\sum \frac{(\frac{2}{3})^n}{n}$ converge, pues

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{n+1}}{\frac{(\frac{2}{3})^n}{n}} = \frac{2}{3} \cdot \lim \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 21

El criterio del cociente no aporta información en el estudio de la serie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{243} + \frac{1}{81} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{729} + \ldots,$$

es decir, $\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^4} + \ldots$, pues

$$\beta = \liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{27} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = 3.$$

Sin embargo, se puede aplicar el criterio de la raíz:

$$(\sqrt[n]{x_n}) = \{ \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^{1/2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^{2/3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^{3/4}}, \ldots\}$$

y $$\lim_n \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{3}.$$

Se trata de una serie convergente.

Observación: El criterio del cociente es, generalmente, más fácil de aplicar que el de la raíz, pues normalmente es más sencillo calcular cocientes que raíces de índice n, pero no obstante, el de más amplia aplicación es el de la raíz. Es decir, cuando el criterio del cociente demuestra la convergencia, también lo hace el de la raíz; cuando éste no decide tampoco lo hace el del cociente.

Los siguientes criterios son más especificos que los anteriores y suelen emplearse en aquellos casos en los que estos no deciden.

11-3.5 Criterio de Raabe

Sean (x_n) una sucesión de números reales no negativos,

$$\alpha = \limsup n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \quad y \quad \beta = \liminf n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right).$$

Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Si $\beta > 1$, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

Demostración

Si $\alpha < 1$, entonces existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se verifica que

$$n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1, \text{ o lo que es lo mismo, } n(x_n - x_{n+1}) < x_n,$$

y

$$(n-1)x_n < n\,x_{n+1}.$$

Como

$$n_0 x_{n_0+1} < (n_0+1)x_{n_0+2} < \ldots < (n-1)x_n,$$

se tiene

$$x_n > \frac{n_0 x_{n_0+1}}{n-1} > \frac{n_0 x_{n_0+1}}{n}.$$

Al ser divergente la serie $\sum \frac{n_0 x_{n_0+1}}{n} = n_0 x_{n_0+1} \sum \frac{1}{n}$, se comprueba la divergencia de la serie $\sum x_n$.

Si $\beta > 1$ y t es un número real tal que $\beta > t > 1$, entonces un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se verifica que

$$n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)>t, \text{ o lo que es lo mismo, } n(x_n - x_{n+1}) > t\,x_n,$$

y $$(n-1)x_n < n\,x_{n+1}.$$

Como $n_0(x_{n_0} - x_{n_0+1}) + (n_0+1)(x_{n_0+1} - x_{n_0+2}) + ... + n(x_n - x_{n+1}) >$

$> t(x_{n_0} + x_{n_0+1} + ... + x_n)$, se tiene

$$n_0 x_{n_0} + x_{n_0+1} + ... + x_n - n\,x_{n+1} > t(x_{n_0} + x_{n_0+1} + ... + x_n)$$

y $$x_{n_0+1} + ... + x_n < \frac{(n_0-t)\,x_{n_0} - n x_{n+1}}{t-1} < \frac{(n_0-t)}{t-1}x_{n_0}.$$

Así pues, $x_1 + ... + x_n < x_1 + ... + x_{n_0} + \frac{(n_0-t)}{t-1}x_{n_0}$, para todo $n \in \mathbf{N}$, es decir, las sumas parciales estan acotadas.

Como se trata de una serie de números no negativos se tiene que la serie $\sum x_n$ converge.

11-3.6 Corolario (Criterio de Raabe)

Sean (x_n) una sucesión de números reales positivos y

$$\alpha = \lim\, n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right).$$

Si $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Si $\alpha > 1$, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

Ejemplo 22

El criterio del cociente no aporta información al estudio de la serie $\sum \frac{n!}{a(a+1)...(a+n-1)}$ puesto que

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{a(a+1)\ldots(a+n)}}{\dfrac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}} = \lim \frac{n+1}{a+n} = 1.$$

Al aplicar el criterio de Raabe se tiene

$$\lim\ n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim\ n\,(1-\frac{n+1}{a+n}) = \lim\ \frac{n\,(a-1)}{n+a} = \text{a-1}.$$

Si $a<2$, entonces la serie $\sum x_n$ diverge.

Si $a>2$, entonces la serie $\sum x_n$ converge.

En el caso $a=2$, entonces $x_n = \frac{1}{n+1}$, para todo n, y obviamente la serie es divergente.

Ejemplo 23

El criterio del cociente no aporta información al estudio de la serie $\sum \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ puesto que

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{\dfrac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2\,(n+1)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+3)}}{\dfrac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}} = \lim \frac{2n+2}{2n+3} = 1.$$

Al aplicar el criterio de Raabe se tiene

$$\lim\ n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim\ n\,(1-\frac{2n+2}{2n+3}) = \lim\ \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2},$$

luego la serie diverge.

El siguiente criterio relaciona la convergencia de series y de integrales impropias.

11-3.7 Criterio de la integral

Sea $f:[a,+\infty)\rightarrow \mathbf{R}$ una función decreciente no negativa y localmente integrable. Entonces la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y la serie $\sum_{n>a}^{\infty} f(n)$ tienen el mismo carácter.

Demostración

Para cualquier número natural k mayor que a se verifica que $f(k) \geq f(t) \geq f(k+1)$ si $t \in [k,k+1]$ y, por tanto,

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\,dt \geq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt = f(k+1)$$

y se tiene que para cualquier par de números $p, q \in \mathbf{N}$ con $q > p$

$$\sum_{k=p}^{q} f(k) \geq \int_p^{q+1} f(t)\,dt \geq \sum_{k=p}^{q} f(k+1).$$

Luego:

Si $\sum_{k=p}^{\infty} f(k)$ converge, entonces $\int_p^{\infty} f(t)\,dt$ converge.

Si $\int_p^{\infty} f(t)\,dt$ converge, entonces $\sum_{k=p}^{\infty} f(k+1)$ converge.

Como las integrales $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ e $\int_p^{\infty} f(t)\,dt$ tienen el mismo carácter, se tiene que $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ tiene igual carácter que la serie.

Ejemplo 24

Al aplicar el criterio de la integral a la serie $\sum ne^{-n}$ se comprueba que es una serie convergente. Veámoslo:

La función $f(x) = xe^{-x}$ definida sobre la semirrecta $[1, \infty)$ es una

función decreciente pues su derivada $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ es un número negativo para cualquier $x > 1$.

Además, la integral impropia $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx < +\infty$ puesto que la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx < +\infty$ y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xe^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

Como $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx$ converge, entonces $\sum ne^{-n}$ converge.

Sección

11-4

Series alternadas

11-4.1 Definición

Una serie de números reales es alternada, si sus términos son positivos y negativos alternativamente. Por ejemplo, la serie

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{9} - \frac{4}{27} + \frac{5}{81} - \dots, \quad \sum n \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}, \text{ es una serie alternada.}$$

11-4.2 Criterio de series alternadas o de Leibnitz

Si (x_n) es una sucesión de números reales decrecientes y convergente a cero, entonces la serie $\sum (-1)^n x_n$ converge.

Demostración:

Al decrecer (x_n), se tiene que $X_{2n+2} - X_{2n} = -x_{2n+1} + x_{2n+2} < 0$ y $X_{2n} = -x_1 + (x_2 - x_3) + \dots + (x_{2n-2} - x_{2n-1}) + x_{2n} > -x_1$, para todo $n \in \mathbf{N}$. Por tanto, la sucesión (X_{2n}) es decreciente y está acotada inferiormente, luego, posee límite finito.

De forma análoga se comprueba que la sucesión (X_{2n-1}) es creciente y está acotada superiormente. Luego, posee límite finito. Además,

$$\lim_n X_{2n} - \lim_n X_{2n-1} = \lim_n (X_{2n} - X_{2n-1}) = \lim_n x_{2n} = 0,$$

luego, las sucesiones (X_{2n}), (X_{2n-1}) y (X_n) tienen el mismo límite.

Ejemplo 25

La serie $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha > 0$, es convergente por el criterio de Leibnitz, puesto que la sucesión $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ es decreciente y converge a cero, para cualquier $\alpha > 0$.

Ejemplo 26

La serie $\sum(-1)^n x_n$, donde (x_n) es la sucesión definida por:

$$x_n = \frac{1}{k} \quad \text{si } n=2k-1 \quad \text{y}$$

$$x_n = \text{Ln}(k+1) - \text{Ln}\, k \quad \text{si } n=2k,$$

para todo $k \in \mathbf{N}$, es convergente por el criterio de Leibnitz.

La sucesión es decreciente, es decir,

$$\frac{1}{k} > \text{Ln}(k+1) - \text{Ln}\, k > \frac{1}{k+1}, \text{ para todo } k \in \mathbf{N}.$$

Para observar esto basta aplicar el teorema del incremento finito a la función $f(x) = \text{Ln}\, x$;

$$\text{Ln}(k+1) - \text{Ln}\, k = \frac{1}{\xi}(k+1-k), \text{ para algún } \xi \in (k, k+1).$$

La sucesión converge a cero puesto que

$$\lim_k \frac{1}{k} = 0 \text{ y}$$

$$\lim_k (\text{Ln}(k+1) - \text{Ln}\, k) = \lim_k \text{Ln}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \text{Ln}\left(\lim_k \frac{k+1}{k}\right) = 0.$$

Sección

11-5 Series de términos cualesquiera

A continuación estudiamos un tipo de convergencia que implica la convergencia ya definida y que posee la ventaja de que permite utilizar los criterios de convergencia de series de términos no negativos.

11-5.1 Definición

La serie $\sum x_n$ **converge absolutamente** si la serie $\sum |x_n|$ converge.

La propiedad fundamental de la convergencia absoluta se expresa en el siguiente teorema.

11-5.2 Teorema

Si la serie $\sum x_n$ converge absolutamente, entonces $\sum x_n$ converge.

Demostración

Esto se deduce de la desigualdad $\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |x_k|$ y del criterio de Cauchy.

Por supuesto, la convergencia usual no implica la convergencia absoluta, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 27

La serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ no converge, por tanto, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ no es absolutamente convergente. Sin embargo, como la sucesión $\frac{1}{\sqrt{n}}$ es decreciente y

converge a cero, entonces la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, por el criterio de Leibnitz.

Ejemplo 28

La serie $\sum \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ converge absolutamente puesto que $\sum \frac{1}{3^n}$ converge al tratarse de una serie geométrica de razón menor que 1.

11-5.3 Definición

La serie $\sum x_n$ es **condicionalmente convergente** si esta serie $\sum x_n$ converge y la serie $\sum |x_n|$ diverge.

Observación: El comportamiento de las series absolutamente convergentes es análogo al de las sumas finitas, es decir, podemos multiplicarlas término a término y variar el orden en que se efectúan las sumas, sin afectar a la convergencia ni a la suma de la serie.

Por el contrario, cualquiera de estas modificaciones en series no absolutamente convergentes requieren comprobación del resultado.

Los criterios de convergencia para series de términos no negativos estudiados anteriormente, nos permiten determinar la convergencia absoluta de una serie.

Es importante también disponer de criterios que permitan decidir si una serie es convergente cuando no lo es absolutamente, es decir, si es condicionalmente convergente. A continuación veremos los criterios de Dirichlet y Abel que son particularmente útiles en este sentido. Ambos se basan en la fórmula de sumación parcial de Abel.

11-5.4 Fórmula de sumación parcial de Abel

Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones de números reales y X_n, Y_n las respectivas sumas parciales, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X_n y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} X_k (y_{k+1} - y_k).$$

Demostración:

Si se considera $X_0 = 0$, se tiene $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1}) y_k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k y_k - \sum_{k=1}^{n} X_k y_{k+1} + X_n y_{n+1} =$$

$$= X_n y_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} X_k (y_{k+1} - y_k).$$

11-5.5 Criterio de Dirichlet

Si $\sum x_n$ es una serie de números reales cuya sucesión de sumas parciales (X_n) está acotada e (y_n) es una sucesión monótona con límite cero, entonces la serie $\sum x_n \cdot y_n$ es convergente.

Demostración

Supongamos inicialmente que la sucesión (y_n) es decreciente. Por ser (X_n) acotada, existe $M > 0$ tal que $|X_n| = |x_1 + x_2 + ... + x_n| < M$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Como la sucesión (y_n) tiene por límite 0, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que $|y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ para todo $n \geq n_0$.

Para todo par de números p y q tales que $n_0 \leq p \leq q$, se tiene que

$$\left| \sum_{n=p}^{q} x_n y_n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q-1} X_n (y_n - y_{n+1}) + X_q y_q \right| \leq$$

$$\leq M \left| \sum_{n=p}^{q-1} (y_n - y_{n+1}) + y_q \right| = 2M|y_p| \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

La convergencia se deduce del criterio de Cauchy.

Supuesto que (y_n) es creciente, entonces la sucesión $(-y_n)$ es decreciente y converge a 0.

Al aplicar el resultado anterior se tiene que la serie $\sum x_n(-y_n)$

converge y, como $\sum x_n \cdot y_n = (-1)\sum x_n(-y_n)$, se tiene la convergencia de $\sum x_n \cdot y_n$.

Ejemplo 29

La serie $\sum \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}$ es convergente para todo $\alpha \in \mathbf{R}$.

Para ver esto supongamos que α no es múltiplo de 2π, ya que en el caso contrario el resultado es trivial.

Por inducción se comprueba que, para todo $n \in \mathbf{N}$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha + \ldots + \operatorname{sen} n\alpha = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

de donde $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha + \ldots + \operatorname{sen} n\alpha \leq \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Al aplicar el criterio de Dirichlet se comprueba la convergencia.

Ejemplo 30

La serie $\sum \frac{\cos n\pi\alpha}{n!}$ es convergente para todo $\alpha \in \mathbf{R}$. Se puede aplicar el criterio de Dirichlet al ser $\left(\frac{1}{n!}\right)$ una sucesión decreciente con límite nulo y $\sum \cos n\pi\alpha$ una serie cuya sucesión de sumas parciales está acotada.

11-5.6 Criterio de Abel

Sean $\sum x_n$ una serie convergente e (y_n) una sucesión monótona y acotada de números reales. Entonces la serie $\sum x_n y_n$ es convergente.

Demostración

Como la sucesión (y_n) es monótona y acotada, entonces esta

sucesión converge a un número real $y \in \mathbf{R}$.

Al aplicar el criterio de Dirichlet se tiene que la serie $\sum x_n(y_n-y)$ converge.

Puesto que $y \cdot \sum x_n$ es convergente, resulta que

$$\sum x_n y_n = \sum x_n (y_n - y) + y \sum x_n \text{ es convergente.}$$

Ejemplo 31

La serie $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n^3}$ converge. Veámoslo:

La sucesión $(x_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada. En efecto, la función $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ definida sobre la semirrecta $(0, \infty)$ es continua y derivable, con derivada: $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \left(\text{Ln}\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$.

Como, al aplicar el Teorema del incremento finito (5.3-2) a la función $f(x) = \text{Ln}\, x$,

$$\text{Ln}(x+1) - \text{Ln}\, x = \frac{1}{\xi}(x+1-x), \text{ para algún } \xi \in (x, x+1),$$

entonces $\text{Ln}\frac{x+1}{x} = \text{Ln}(x+1) - \text{Ln}\, x = \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1}$.

Así pues, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$. Luego f es una función creciente. Además, $\lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Por otro lado, se tiene que la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. Por tanto se está en condiciones de aplicar el criterio de Abel y asegurar que la serie $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n^3}$ converge

Problemas Propuestos

1) Usar la sucesión de las sumas parciales de la serie:

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\dots$$

para probar que dicha serie es convergente y calcular su suma.

2) Estudiar el carácter de la serie $\sum \frac{\sqrt{n^2-1}}{3n}$.

3) Usar el primer criterio de comparación para determinar la convergencia o no de la serie $\sum \frac{1+3^n}{2^n}$.

4) Demostrar la convergencia de la serie $\sum \frac{n^2+n}{2n^4-1}$.

5) Aplicar el criterio del cociente a la serie $\sum \frac{n3^{n+1}}{2^n}$.

6) Usar el criterio más adecuado para estudiar la convergencia de la serie: $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\dots$

7) Aplicar el criterio de Leibnitz para determinar la convergencia de la serie $\sum n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$.

8) Estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{\operatorname{sen}\alpha n}{2^n}$.

9) Usar el criterio más adecuado para discutir sobre la convergencia de la serie:

$$\sum \frac{n!}{(n+1)^n 2^n}.$$

10) Analizar la convergencia de la serie $\sum \frac{2n+1}{n3^n}$.

Capítulo 12

Resolución Aproximada de Ecuaciones

Existen situaciones técnicas en las cuales no es necesario conocer la solución de una ecuación y suele bastar el conocimiento aproximado de ésta, por ejemplo, si se procede a establecer unas determinadas medidas para la confección de un cubo, basta con disponer de unos valores que estén dentro del rango de tolerancias que poseen los aparatos que intervienen en la confección del cubo.

Las cuestiones relativas al cálculo aproximado experimentan en la actualidad un enorme impulso, al disponerse de ordenadores, que nos liberan de largos y tediosos cálculos numéricos.

En este capítulo y en los dos siguientes, se aborda la iniciación del lector a una rama peculiar de las Matemáticas, que trata de temas de aproximación numérica, denominada Cálculo Numérico.

Es bien conocido que no existe método algebraico para determinar las raíces de una ecuación polinómica de grado superior a cuatro, así pues, se utilizan métodos numéricos para determinar aproximaciones de las raíces. Dichos métodos se utilizan en situaciones más generales, para ecuaciones definidas mediante una función f que posee determinadas propiedades.

Sección

12-1

Aproximación de una solución real de una ecuación

Es bien conocida la estrategia que se sigue habitualmente para resolver una ecuación polinómica de segundo grado, $Ax^2 + Bx + C = 0$. Se usa el siguiente algoritmo, constituído por los pasos:

Paso 1º : Determinación del signo de la expresión $B^2 - 4AC$.

Paso 2º : Cálculo del valor de la raíz $\sqrt{|B^2 - 4AC|}$.

Paso 3º : Establecer las expresiones:

$$\frac{-B + \sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A} \qquad \frac{-B - \sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A} \quad \text{si } B^2 - 4AC \geq 0.$$

$$\frac{-B + \sqrt{|B^2 - 4AC|}\, i}{2A} \qquad \frac{-B - \sqrt{|B^2 - 4AC|}\, i}{2A} \quad \text{si } B^2 - 4AC < 0.$$

Debe observarse que la utilización de este algoritmo permite trasladar la dificultad de encontrar un número, real o complejo, que verifique la ecuación anterior, al problema de calcular la raíz cuadrada de un número real.

Si los coeficientes de la ecuación son números enteros, no parece suponer mucha dificultad esta última cuestión, aunque conviene meditar sobre la situación particular siguiente:

$$\sqrt{3}x^2 + \sqrt[3]{2}\, x - 1 = 0,$$

cuyas soluciones son los números reales

$$x_1 = \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt{\sqrt[3]{4} + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt[3]{2} - \sqrt{\sqrt[3]{4} + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}.$$

Algunas ecuaciones algebraicas y algunas ecuaciones trascendentes admiten estrategias de resolución similares a la anterior, es decir, *se traslada la dificultad al problema de la determinación de un número real no racional, mediante la oportuna manipulación algebraica* .

En general, no se puede asegurar la existencia de estrategias similares,

aunque la expresión de la ecuación sea realmente simple. Por ejemplo,

$$2^x + x = 0.$$

Esta ecuación posee una única solución real. Para llegar al convencimiento de la existencia de solución, basta reescribir la ecuación de la forma:

$$2^x = -x,$$

y observar en la Figura 1 las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2^x \quad \text{y} \quad g(x) = -x,$$

que poseen un punto común.

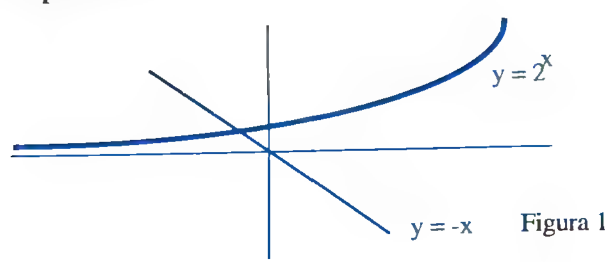


Figura 1

Es necesario disponer de algún método que permita determinar un valor real muy próximo a una raíz de una ecuación arbitraria. Este método debe ser lo suficientemente flexible para poder obtener un valor próximo tan cercano a la raíz como se desee.

Los métodos que se describen en este capítulo requieren conocer un intervalo donde esté contenida la raíz que se quiere aproximar.

Como la forma más general de definir una ecuación es mediante la expresión

$$f(x) = 0,$$

donde f es una función continua en un intervalo [a,b], o en todo **R**, puede resultar muy útil:

- Disponer de una idea tosca de la gráfica de la función f.

- Reflexionar sobre la naturaleza de la función, con el fin de disponer de información auxiliar, por ejemplo, si f es derivable con derivada de signo constante.

Intentar escribir la función f como diferencia de dos funciones

conocidas, f_1 y f_2, de forma que la ecuación se reescriba de la forma:

$$f_1(x) = f_2(x),$$

es decir, se estudian los cortes de las gráficas de las funciones f_1 y f_2.

12-1.1 Separación de raíces de una ecuación

Se entiende por separar una raíz de una ecuación a determinar un intervalo en el cual esté contenida dicha raíz y no existan más raíces en él. Usualmente, separar raíces no es una tarea sencilla, si bien, una vez conocida la existencia de una raíz, se puede sistematizar un proceso de separación de raíces.

En el estudio de la existencia y separación de raíces se utiliza el teorema de Bolzano (4-2.6), para funciones reales continuas.

Dada una ecuación $f(x) = 0$, para aplicar el Teorema 4-2.6 se debe determinar el dominio de la función f inicialmente. Si f existe sobre el intervalo [a,b],o sobre todo **R**, tal que

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

entonces al considerarse una partición de [a,b],

$$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b,$$

debe existir algún subíndice i tal que verifica que

$$f(t_{i-1}) \cdot f(t_i) < 0,$$

de forma que se asegura la existencia de una raíz en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

12-1.2 Teorema (Condiciones suficientes de existencia de raíz única).

Sea $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua en [a,b] y derivable en (a,b) tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ y $f'(x)$ tiene signo constante en (a,b). Entonces existe un único número real, $c \in (a,b)$, tal que $f(c) = 0$.

Demostración:

Por el Teorema 4-2.6 de Bolzano, se asegura la existencia de un número c, $c \in (a,b)$, tal que $f(c) = 0$. Ahora bien, según el párrafo siguiente al Corolario 5-3.4, se tiene que:

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a,b).

Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente en (a,b).

En cualquier caso, la función f es inyectiva y por tanto, no existe ningún otro punto en el cual se anule la función.

Ejemplo 1

Para separar las raíces reales de la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$, se considera la función

$$f(x) = x^4 - 4x - 1.$$

La función f es derivable en todo **R**, por ser una función polinómica y, además, la función derivada

$$f'(x) = 4(x^3-1)$$

se anula únicamente en $x = 1$. Así pues, el signo de $f'(x)$ es constante en cada una de las dos semirrectas abiertas, $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$.

Como para $x = 1$ se tiene un valor de la función negativo, $f(1) = -4$, entonces se procede a buscar sistemáticamente un par de números a y b, $a < 1 < b$, tales que $f(a) > 0$ y $f(b) > 0$. Por ejemplo,

$a = -1$...........$f(-1) = 4$,
$c = 1$............$f(1) = -4$,
$b = 2$ ....$f(2) = 7$.

Existe una única solución en el intervalo $[-1,1]$ y otra única solución en el intervalo $[1,2]$, como se observa en la Figura 2:

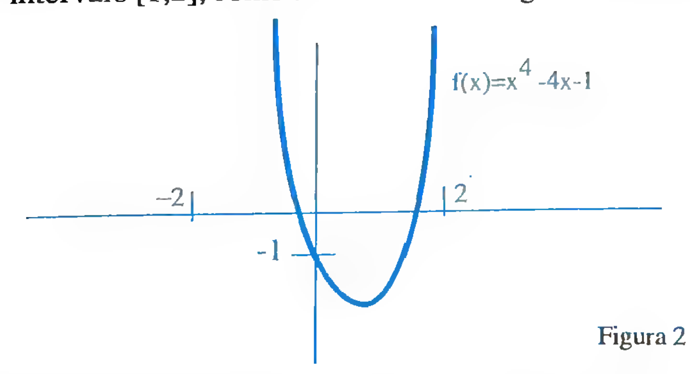


Figura 2

12-1.3 Teorema (Error cometido al considerar un valor aproximado de una raíz).

Sea $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $|f'(x)| > m_1 > 0$ para todo $x\in(a,b)$. Sea $\zeta\in[a,b]$ una raíz de la

ecuación $f(x) = 0$, y $\upsilon \in [a,b]$ un valor aproximado de la raíz. Entonces,

$$|\upsilon - \zeta| \leq \frac{|f(\upsilon)|}{m_1} .$$

Demostración

Tanto ζ como υ son elementos de [a,b], luego al aplicar el teorema del incremento finito, Teorema 5-3.2, se tiene que existe un punto c, comprendido entre υ y ζ tal que

$$|f(\upsilon) - f(\xi)| = |f'(c)|\,(\upsilon - \zeta) ,$$

por tanto,

$$|\upsilon - \zeta| = \frac{|f(\upsilon)|}{|f'(c)|} \leq \frac{|f(\upsilon)|}{m_1} ,$$

pues $f(\zeta) = 0$. Luego,

$$|\vartheta - \zeta| \leq \frac{|f(\upsilon)|}{m_1} .$$

Sección

12-2 Métodos de determinación de valores aproximados de una raíz

A continuación se exponen diversos métodos mediante los cuales se consigue obtener un valor aproximado de la raíz de una ecuación con la precisión deseada.

Si bien aplicar cada uno de los métodos con calculadora puede ser una tarea enojosa, el uso de un ordenador permite superar situaciones de cálculo incómodas. Las tablas numéricas de este capítulo se realizaron mediante un ordenador.

12-2.1 Método de la bisección

Sea $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)\cdot f(b)<0$. Se considera la siguiente familia de intervalos cerrados $[a_i,b_i]$, $i\in \mathbf{N}$, donde los extremos a_i y b_i se determinan de la siguiente forma:

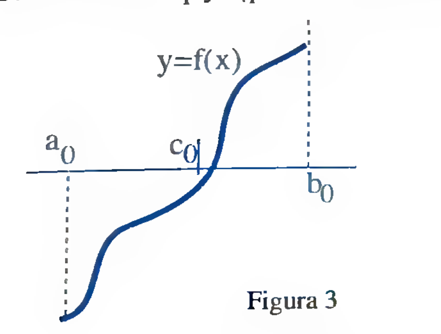


Figura 3

Figura 4

- $a_0 = a$ y $b_0 = b$; con $f(a_0)\cdot f(b_0) < 0$.
- Se considera, $c_0 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$, el punto medio del intervalo $[a_0,b_0]$.

Entonces:

Si $f(c_0)=0$, se ha determinado una raíz de la ecuación $f(x)=0$.

Si $f(a_0)\cdot f(c_0)<0$, se considera $a_1=a_0$ y $b_1=c_0$; con $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$.

Si $f(c_0)\cdot f(b_0)<0$, se considera $a_1=c_0$ y $b_1=b_0$; con $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$.

- Supuesto elegido el intervalo $[a_i,b_i]$ tal que $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$ y que ningún punto medio de los intervalos anteriores al paso i-ésimo es raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se considera el punto medio del intervalo $[a_i,b_i]$:

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} .$$

Entonces:

Si $f(c_i) = 0$, se ha determinado una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Si $f(a_i) \cdot f(c_i) < 0$, se considera $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = c_i$; con $f(a_{i+1}) \cdot f(b_{i+1}) < 0$.

Si $f(c_i) \cdot f(b_i) < 0$, se considera $a_{i+1} = c_i$ y $b_{i+1} = b_i$; con $f(a_{i+1}) \cdot f(b_{i+1}) < 0$.

Así pues, se obtiene una sucesión decreciente de intervalos cerrados y encajados, es decir,

$$[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \ldots \supset [a_i,b_i] \supset [a_{i+1},b_{i+1}] \supset \ldots$$

tal que en el interior de cada uno de ellos existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Además, la sucesión de los diámetros, $d_i = b_i - a_i$, de los intervalos converge a cero;

$$\lim_{i \to \infty} d_i = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{2^i} (b - a) = 0 .$$

Si se considera α, la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, entonces,

$$\{\alpha\} = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} [a_i,b_i] ,$$

y se tiene que $\lim_{i \to \infty} a_i = \alpha$ y $\lim_{i \to \infty} b_i = \alpha$.

Se puede considerar como valor aproximado de α al valor a_i, de forma que se produce un error menor que el diámetro del intervalo $[a_i,b_i]$:

$$|a_i - \alpha| < \frac{1}{2^i} (b - a) .$$

Ejemplo 2

La ecuación del Ejemplo 1, $x^4 - 4x - 1 = 0$, posee una única raíz en el intervalo $[-1,1]$. Para determinar un valor aproximado, por el método de la bisección, se construye la siguiente tabla:

Tabla 12.1

n	a_n	b_n	c_n	signos de $f(a_n),f(b_n),f(c_n)$
1	-1	1	0	+ - -
2	-1	0	-.5	+ - +
3	-.5	0	-.25	+ - +
4	-.25	0	-.125	+ - -
5	-.25	-.125	-.1875	+ - -
6	-.25	-.1875	-.21875	+ - -
7	-.25	-.21875	-.234375	+ - -
8	-.25	-.234375	-.2421875	+ - -
9	-.25	-.2421875	-.24609375	+ - -
10	-.25	-.24609375	-.248046875	+ - -
11	-.25	-.248046875	-.2490234375	+ - -
12	-.25	-.2490234375	-.24951171875	+ - +
13	-.24951171875	-.2490234375	-.249267578125	+ - +
14	.249267578125	-.2490234375	-.2491455078125	+ - +
15	-.2491455078125	-.2490234375	-.24908447265625	+ - +
16	-.24908447265625	-.2490234375	-.249053955078125	+ - +
17	-.249053955078125	-.2490234375	-.2490386962890625	+ - +
18	-.2490386962890625	-.2490234375	-.2490310668945313	+ - -
19	-.2490386962890625	-.2490310668945313	-.2490348815917969	+ - -
20	-.2490386962890625	-.2490348815917969	-.2490367889404297	+ - -
21	-.2490386962890625	-.2490367889404297	-.2490377426147461	+ - -
22	-.2490386962890625	-.2490377426147461	-.2490382194519043	+ - -
23	-.2490386962890625	-.2490382194519043	-.2490384578704834	+ - +
24	-.2490384578704834	-.2490382194519043	-.2490383386611939	+ - -
25	-.2490384578704834	-.2490383386611939	-.2490383982658386	+ - +

valor aproximado -0.24903839, con error menor que 10^{-7}.

12-2.2 Método de la secante o de las partes proporcionales.

Sea $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $f(a)\cdot f(b)<0$. Se considera la familia de intervalos cerrados $[a_i,b_i]$, $i\in\mathbf{N}$, donde los extremos a_i y b_i se determinan de la siguiente forma:

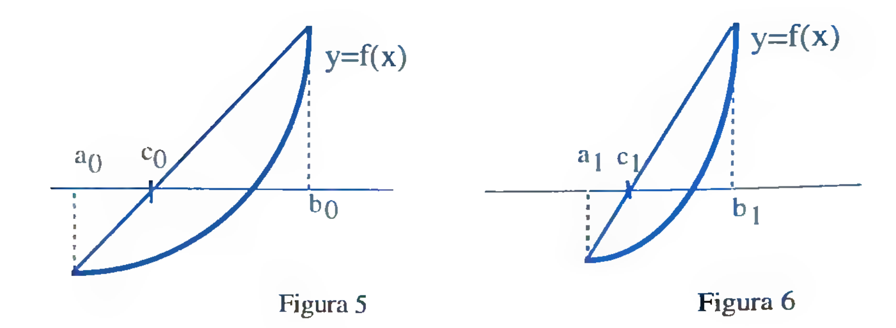


Figura 5 Figura 6

- $a_0 = a$ y $b_0 = b$; con $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

- Se considera la recta secante a la gráfica de la función $f(x)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$,

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)},$$

y se determina el punto de corte de esta recta con el eje OX,

$$c_0 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)\ .$$

Si $f(c_0) = 0$, se ha determinado una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Si $f(a_0) \cdot f(c_0) < 0$, se considera $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$, con $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Si $f(c_0) \cdot f(b_0) < 0$, se considera $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$, con $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- Supuesto elegidos los extremos del intervalo $[a_i,b_i]$ tal que $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$ y que ningún punto $c_p \in [a_{p-1},b_{p-1}]$, con $p < i$, es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se considera la recta secante a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $(a_i,f(a_i))$ y $(b_i,f(b_i))$,

$$\frac{x-a_i}{b_i-a_i} = \frac{y-f(a_i)}{f(b_i)-f(a_i)},$$

e igualmente se considera el punto de corte de esta recta con el eje OX,

$$c_i = a_i - \frac{f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}(b_i - a_i).$$

Si $f(c_i) = 0$, se ha determinado una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Si $f(a_i) \cdot f(c_i) < 0$, se considera $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = c_i$, con $f(a_{i+1}) \cdot f(b_{i+1}) < 0$.

Si $f(c_i) \cdot f(b_i) < 0$, se considera $a_{i+1} = c_i$ y $b_{i+1} = b_i$, con $f(a_{i+1}) \cdot f(b_{i+1}) < 0$.

De esta forma se construye una sucesión decreciente de intervalos cerrados encajados

$$[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$$

tal que en el interior de cada intervalo existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Al analizar la Figura 7 se observa que el punto c se toma de forma que la relación de las distancias a los extremos del intervalo están en la razón:

$$\frac{-f(a)}{f(b)}.$$

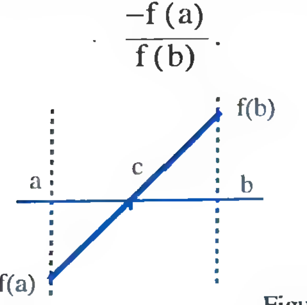


Figura7

A diferencia con el método de la bisección, la longitud de los intervalos $[a_i,b_i]$ no tiene, necesariamente, que tender a cero. Para ver esto basta considerar una función con derivada segunda continua en $[a,b]$ (escribiremos $f \in C^2([a,b])$) tal que la función f'' tiene signo constante en $[a,b]$. Por ejemplo, $f''(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, es decir, se considera una función convexa vista desde abajo de la gráfica.

Para esta función, se distinguen los dos casos siguientes:

CASO I: Supuesto $f(a) > 0$, entonces se tiene que $a_i = a$ y

$$b_i = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a)}(b_{i-1} - a);$$

para todo $i \in \mathbf{N}$. Entonces,

$$a < \ldots < b_i < b_{i-1} < \ldots < b_0 = b$$

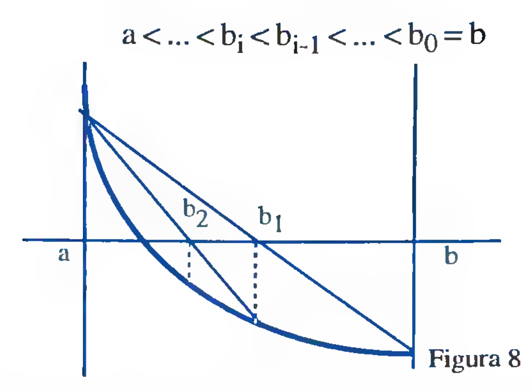


Figura 8

y la sucesión (b_i) es decreciente y acotada. Así pues, esta sucesión posee límite, que es precisamente la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, puesto que:

$$\xi = \lim_{i \to \infty} b_i = \lim_{i \to \infty} \left(b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a)} (b_{i-1} - a) \right)$$

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f(\xi) - f(a)} (\xi - a) \ , \quad \text{por lo cual,} \quad f(\xi) = 0.$$

CASO II: Supuesto $f(a) < 0$, entonces se tiene que $b_i = b$, para todo $i \in \mathbf{N}$,

$$a_i = a_{i-1} - \frac{f(a_{i-1})}{f(b) - f(a_{i-1})} (b - a_{i-1})$$

para todo $i \in \mathbf{N}$. Entonces,

$$a = a_0 < \ldots < a_i < a_{i+1} < \ldots < b$$

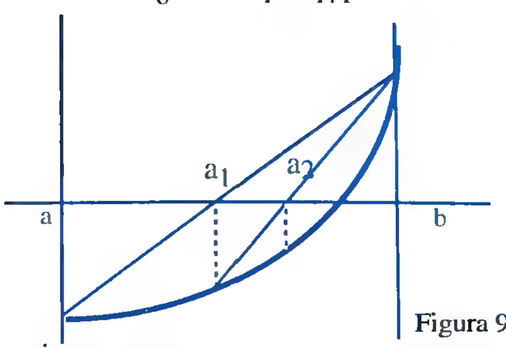


Figura 9

y la sucesión (a_i) es creciente y acotada. Así pues, esta sucesión posee límite, que es precisamente la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, puesto que

$$\xi = \lim_{i \to \infty} a_i = \lim_{i \to \infty}\left(a_{i-1} - \frac{f(a_{i-1})}{f(b) - f(a_{i-1})}(b - a_{i-1}) \right)$$

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f(b) - f(\xi)}(b - \xi)\ , \quad \text{luego } f(\xi) = 0.$$

Para estudiar el error que se comete al utilizar un valor aproximado obtenido por este método, basta comprobar que éste se acota por la diferencia de dos valores aproximados sucesivos. Para ello basta considerar los dos casos anteriores, en los cuales las longitudes de los intervalos $[a_i,b_i]$ no tienden a cero. Se desarrolla el CASO I, puesto que el CASO II se hace de forma análoga.

$$b_i = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a)}(b_{i-1} - a)\ ,$$

$$-f(b_{i-1}) = \frac{f(b_{i-1}) - f(a)}{b_{i-1} - a}(b_i - b_{i-1})\ ,$$

$$\text{luego,} \quad f(\xi) - f(b_{i-1}) = \frac{f(b_{i-1}) - f(a)}{b_{i-1} - a}(b_i - b_{i-1})\ .$$

Al aplicar dos veces el Teorema del incremento finito, se tiene que existen un par de números, $\lambda \in (\xi\ , b_{i-1})$ y $\mu \in (a\ , b_{i-1})$, tales que

$$f'(\lambda)\ (\xi - b_{i-1}) = f(\xi) - f(b_{i-1}) = \frac{f(b_{i-1}) - f(a)}{b_{i-1} - a}(b_i - b_{i-1}) =$$

$$= f'(\mu)\ (b_i - b_{i-1})\ ,$$

$$f'(\lambda)\ (\xi - b_i + b_i - b_{i-1}) = f'(\mu)\ (b_i - b_{i-1})$$

y

$$\xi - b_i = \frac{f'(\mu) - f'(\lambda)}{f'(\lambda)}(b_i - b_{i-1})\ .$$

Como $f \in C^2[a,b]$, se puede considerar que si se verifica que

$0 < m = \min(|f'(x)|\ , x \in [a,b])$ y $M = \max(|f'(x)|, x \in [a,b])$,

entonces se cumple que

$$|\xi - b_i| \le \frac{M - m}{m}|b_i - b_{i-1}|\ .$$

Ejemplo 3

La ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ posee una única raíz en el intervalo [1,2]. Para determinar un valor aproximado de esta raíz, se construye la siguiente tabla.

Se considera $f(x) = x^4 - 4x - 1$, que es continua y derivable sucesivamente en **R**. Además, $f'(x) = 4(x^3 - 1)$, $f''(x) = 12x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, $f(1) = -4$ y $f(2) = 7$.

Tabla 12.2

n	a_n	b_n	c_n	signos de $f(a_n), f(b_n), f(c_n)$
1	1	2	1.363636363636364	- + -
2	1.363636363636364	2	1.55440241276946	- + -
3	1.55440241276946	2	1.627771193002973	- + -
4	1.627771193002973	2	1.652145773855107	- + -
5	1.652145773855107	2	1.659821430811243	- + -
6	1.659821430811243	2	1.662196773884184	- + -
7	1.662196773884184	2	1.662927839685489	- + -
8	1.662927839685489	2	1.66315238342522	- + -
9	1.66315238342522	2	1.663221445412654	- + -
10	1.663221445412654	2	1.663242543651549	- + -
11	1.663242543651549	2	1.663249051716407	- + -
12	1.663249051716407	2	1.66325110021482	- + -
13	1.66325110021482	2	1.663251776581937	- + -
14	1.663251776581937	2	1.663251940804383	- + -

valor aproximado 1.663251 con error menor que 10^{-7}

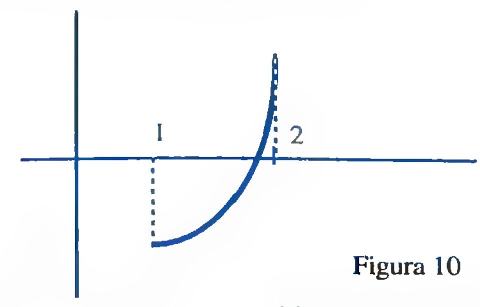


Figura 10

Al tomar el valor aproximado x = 1.663251, se comete un error

$$|\xi - x| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} |a_n - a_{n-1}|$$

con $m_1 = \min\{|f'(x)|, x \in [1.01,2]\} = |f'(1.01)|$,

$M_1 = \max\{|f'(x)|, x \in [1.01,2]\} = |f'(2)|$

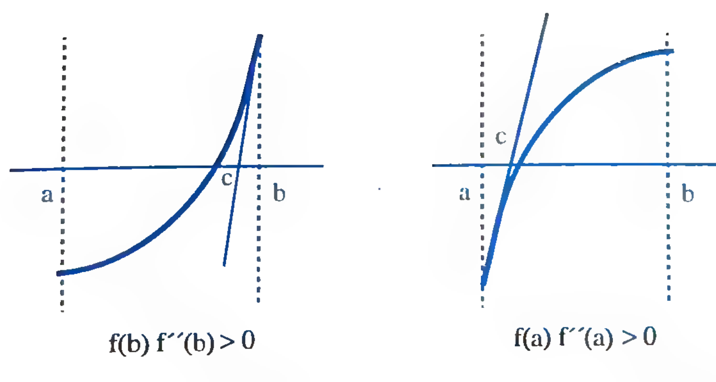
y $n = 15$.

12-2.3 Método de Newton o de la Tangente

Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función dos veces derivable, con derivada segunda continua, de forma que las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ poseen signo constante y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Se considera la familia de intervalos cerrados $[a_i,b_i]$, con $i \in \mathbf{N}$, donde los extremos a_i y b_i se determinan de la siguiente forma:

- $a_0 = a$ y $b_0 = b$, con $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Se considera, o bien la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (a,f(a)) o bien la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (b,f(b)), según qué recta corte al eje OX en un punto de [a,b], y se determina el punto de corte.



$f(b)\,f''(b) > 0$ $f(a)\,f''(a) > 0$

Figura 11 Figura 12

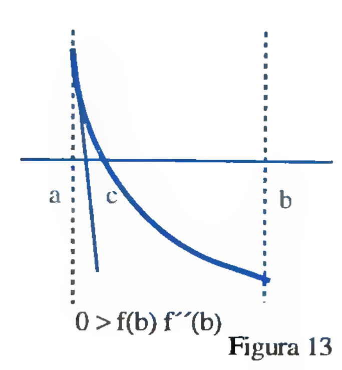


Figura 13

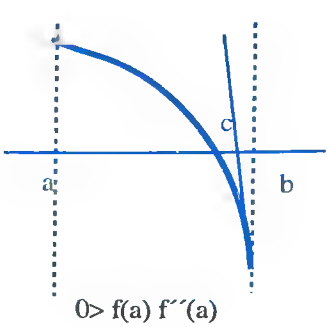


Figura 14

Si $f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0$, entonces se elige la recta $y - f(a_0) = f'(a_0)(x - a_0)$ que corta al eje OX en $c_0 = a_0 - \dfrac{f(a_0)}{f'(a_0)}$. Si $f(c_0) \neq 0$, se considera $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$, con $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Si $f(b_0) \cdot f''(b_0) > 0$, entonces se elige la recta $y - f(b_0) = f'(b_0)(x - b_0)$, que corta al eje OX en $c_0 = b_0 - \dfrac{f(b_0)}{f'(b_0)}$. Si $f(c_0) \neq 0$, se considera $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$, con $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- Supuesto elegidos los extremos del intervalo $[a_i,b_i]$ tales que $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$ y que ningún punto $c_p \in [a_{p-1},b_{p-1}]$, con $p < i$, es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se considera, o bien la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (a,f(a)) o bien la recta tangente a la gráfica de la función en (b,f(b)), según cuál de las dos rectas corta al eje OX en un punto de $[a_i,b_i]$, y se determina el punto de corte.

Si $f(a_i) \cdot f''(a_i) > 0$, entonces se elige la recta $y - f(a_i) = f'(a_i)(x - a_i)$, que corta al eje OX en $c_i = a_i - \dfrac{f(a_i)}{f'(a_i)}$. Si $f(c_i) \neq 0$, se considera $a_{i+1} = c_i$ y $b_{i+1} = b_i$, donde $f(a_{i+1}) \cdot f(b_{i+1}) < 0$.

Si $f(b_i) \cdot f''(b_i) > 0$, entonces se elige la recta $y - f(b_i) = f'(b_i)(x - b_i)$ que

corta al eje OX en $c_i = b_i - \dfrac{f(b_i)}{f'(b_i)}$. Si $f(c_i) \neq 0$ se considera $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = c_i$, donde $f(a_{i+1}) \cdot f(b_{i+1}) < 0$.

De cualquier forma, se construye una sucesión decreciente de intervalos cerrados encajados

$$[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset ... \supset [a_n,b_n] \supset ...$$

tal que en el interior de cada intervalo existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

De forma análoga a lo que sucede en el método de la secante, con este método no se obtiene, necesariamente, una sucesión de intervalos encajados cuyas longitudes tienden a cero, puesto que uno de los extremos de todos los intervalos puede tener el mismo valor. Se distinguen dos casos:

CASO I: Supuesto $f(a_i) \cdot f''(a_i) > 0$, entonces se tiene

$$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)} \quad \text{y} \quad b_{i+1} = b_i \text{, para todo } i \in \mathbf{N}.$$

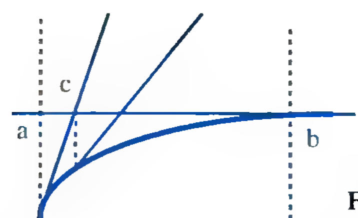


Figura 15

Si $f(a_i) < 0$, entonces $f''(a_i) > 0$, ver Figura 15, y si $f(a_i) > 0$, entonces $f''(a_i) < 0$, ver Figura 13.

La sucesión (a_i), de los extremos inferiores de los intervalos encajados, es estrictamente creciente y acotada. Luego esta sucesión converge a un elemento ξ que es precisamente la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, puesto que

$$\xi = \lim_{i \to \infty} a_i = \lim_{i \to \infty} \left(a_{i-1} - \frac{f(a_{i-1})}{f'(a_{i-1})} \right) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)},$$

ya que $f'(\zeta) \neq 0$ y $f(\xi) = 0$.

CASO II: Supuesto que $f(b_i) \cdot f''(b_i) > 0$, entonces se tiene:

$$a_{i+1} = a_i \quad , \quad b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}, \text{ para todo } i \in \mathbf{N}.$$

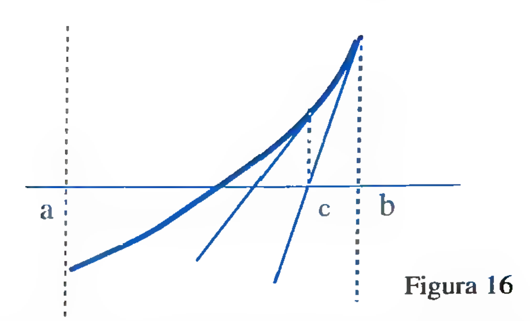


Figura 16

Si $f(b_i) > 0$, entonces $f'(b_i) > 0$, ver Figura 16, y si $f(b_i) < 0$, entonces $f'(b_i) < 0$, ver Figura 14.

Por lo tanto, la sucesión (b_i) es estrictamente decreciente y acotada. Luego esta sucesión converge a un elemento, ξ, que es precisamente la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, puesto que

$$\xi = \lim_{i \to \infty} b_i = \lim_{i \to \infty} \left(b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f'(b_{i-1})} \right) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)},$$

ya que $f'(\zeta) \neq 0$, y $f(\xi) = 0$.

Para estudiar el error que se comete al utilizar un valor aproximado obtenido por este método, basta comprobar que éste se acota por la diferencia de dos valores aproximados sucesivos. Para ello, se parte de la desigualdad

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

donde ξ es la raíz, x_n es el valor aproximado y

$$m_1 = \min\{|f'(x)|, x \in [a,b]\}$$

Al aplicar la fórmula de Taylor en el punto x_{n-1}, se tiene que existe un número υ comprendido entre x_{n-1} y x_n tal que

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\upsilon)}{2!}(x - x_{n-1})^2;$$

como $x_n = x_{n-i} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, se tiene $f(x_n) = \dfrac{f''(\upsilon)}{2!}(x_n - x_{n-1})^2$ y

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2!}(x_n - x_{n-1})^2,$$

donde $M_2 = \max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}$. Por lo tanto, el error cometido se acota por

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Así pues, a partir de ciertas aproximaciones primeras se puede considerar

$$|\xi - x_n| \approx |x_n - x_{n-1}|,$$

con lo cual las aproximaciones muestran cifras exactas. Además, el número de cifras exactas, de una aproximación a la siguiente, se duplica. Para ver esto, basta considerar la fórmula de Taylor en el punto x_n:

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(\eta)}{2!}(\xi - x_n)^2$$

donde η es un número comprendido entre x_n y ξ. Como $f(\xi) = 0$ despejamos ξ de la forma

$$\xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(\eta)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

luego:

$$\xi - x_{n+1} = \frac{f''(\eta)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2 \quad \text{y} \quad |\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(\zeta - x_n)^2.$$

Si se supone que $\dfrac{M_2}{2m_1} < 1$ y que $|\xi - x_n| \leq \dfrac{1}{10^k}$, entonces

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{1}{10^{2k}}.$$

Ejemplo 4

La ecuación $2^x + x = 0$ posee una única raíz en el intervalo [-1,0]. Para determinar un valor aproximado de esta raíz, se construye una tabla de valores aproximados.

Se considera $f(x) = 2^x + x$, que es una función continua y derivable sucesivamente en **R**.

$$f'(x) = 2^x \text{Ln}\, 2 + 1 > 0, \text{ para todo } x \in \mathbf{R}$$

$$f''(x) = 2^x \text{Ln}^2 2 > 0, \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$

Además, $f(-1) = -0'5$ y $f(0) = 1$.

Tabla 12.3

n	a_n	b_n	c_n	signos de $f(a_n), f(b_n), f(c_n)$
1	-1	0	-0,5906161091496410	- + +
2	-1	-0,5906161091496410	-0,6409096177243640	- + +
3	-1	-0,6409096177243640	-0,6411857363738100	- + +
4	-1	-0,6411857363738100	-0,6411857445049860	- + +
5	-1	-0,6411857445049860	-0,6411857445049860	- + +

valor aproximado -0.641185, con error menor que 10^{-7}.

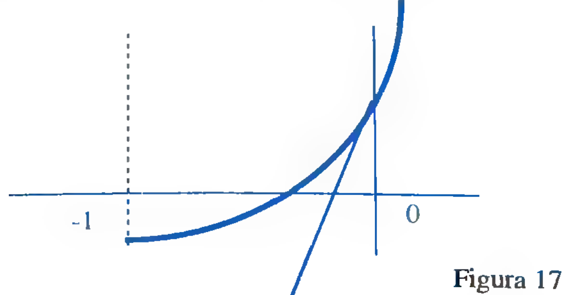


Figura 17

Observación: De los tres métodos expuestos hasta el momento se puede observar que el método de Newton parece ser el más recomendable pues converge más rápidamente que los otros dos, si bien no es muy aconsejable utilizarlo en el caso de que la función tenga una gráfica muy cercana a una recta horizontal, puesto que al considerar la expresión

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

se observa que para valores muy pequeños de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función se experimenta una gran variación de un valor aproximado al siguiente. Este método es muy útil en el caso de valores grandes de pendientes de la recta tangente, puesto que las variaciones entre dos valores aproximados consecutivos son muy pequeñas.

12-2.4 Método de iteración o de aproximaciones sucesivas

Sea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una función continua y se considera la ecuación

$$f(x) = 0\,.$$

El método que se describe se basa en conseguir expresar la anterior ecuación en la forma siguiente

$$x = g(x),$$

donde $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es una función continua, y a partir de una aproximación primera de una raíz, x_0, obtener la sucesión de números (x_n), $n\in\mathbf{N}$, definida de la forma

$$x_{n+1} = g(x_n)\,.$$

Si la sucesión (x_n) es convergente hacia un número ξ, entonces ese número es una raíz de la anterior ecuación, puesto que

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = g(\xi)\,.$$

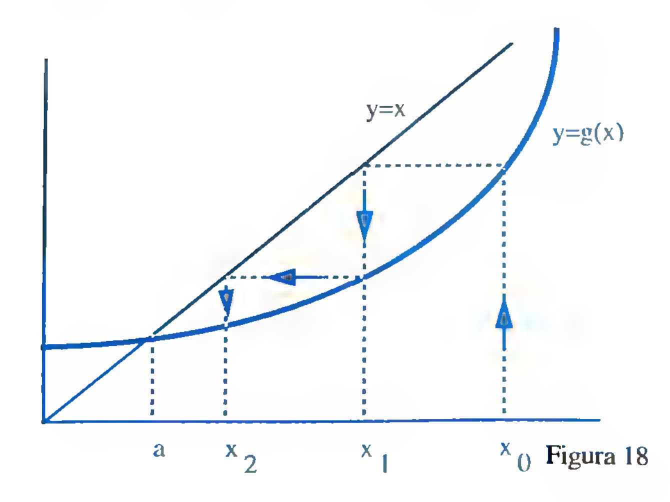


Figura 18

La dificultad que presenta este método es que la sucesión de números (x_n) no siempre es convergente; en la Figura 19 se puede apreciar esto, gráficamente.

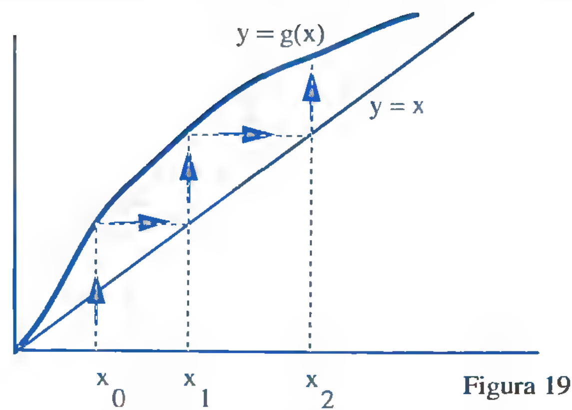


Figura 19

El primer obstáculo que presenta este método es asegurar la existencia de raíz, para lo cual se enuncian los siguientes resultados.

12-2.5 Teorema

Sea $g:[a,b]\to[a,b]$ una función continua. Entonces, existe un punto $\lambda \in [a,b]$ tal que $\lambda = g(\lambda)$.

Demostración

Se considera la función $t(x) = g(x) - x$, que es una función continua.

Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$, entonces se verifica el enunciado. En caso contrario, es decir, $g(a) > a$ y $g(b) < b$ se verifica que

$$t(b) < 0 \quad y \quad t(a) > 0.$$

Se puede aplicar el teorema de Bolzano (4-2.6), que asegura la existencia de un $\lambda \in [a,b]$ tal que $t(\lambda) = 0$.

Observación: Con este teorema se asegura la existencia de al menos un punto que anule a la función t aunque pueden existir más. Un punto z que cumple: $z = g(z)$ se dice que es un punto fijo de la función g.

12-2.6 Teorema

Sea $g:[a,b]\to[a,b]$ una función derivable en $[a,b]$ tal que $|g'(x)| \leq k$, para cualquier $x \in [a,b]$, con $0 < k < 1$. Entonces, existe una única raíz de la ecuación $x = g(x)$ en $[a,b]$. Además, la sucesión de puntos (x_n), $n \in N$, con $x_{n+1} = g(x_n)$, supuesto x_0 un punto de $[a,b]$, converge a dicha raíz.

Demostración

Por el teorema anterior, se tiene asegurada la existencia de una raíz de la ecuación. Veamos que esta raíz es única:

Supuesta la existencia de dos raíces en [a,b], x_1 y x_2, y si se aplica el Teorema del incremento finito, entonces existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = g'(c) \quad \text{y por tanto,} \quad g'(c) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1,$$

que contradice la hipótesis de ser $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [a,b]$.

Como $[a,b] \supset g([a,b])$, entonces se tiene que la sucesión (x_n) está contenida en [a,b].

Si para algún índice n se verifica que $x_n = \lambda$, donde λ es la raíz de la ecuación, entonces para cualquier índice mayor que n se tiene

$$x_{n+i} = g(x_{n+i-1}) = g(g(x_{n+i-2})) = ... = g(...g(x_n)) = g...g(\lambda) = \lambda.$$

Si $x_n \neq \lambda$ para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces al aplicar el Teorema del incremento finito, se tiene que existe un punto t_n comprendido entre x_n y λ tal que

$$g(x_n) - g(\lambda) = g'(t_n)(x_n - \lambda),$$

es decir, $x_{n+1} - \lambda = g'(t_n)(x_n - \lambda)$,

y $|x_{n+1} - \lambda| \leq |g'(t_n)|\,|x_n - \lambda|$.

Luego,

$$|x_1 - \lambda| \leq k\,|b - a|,$$

$$|x_2 - \lambda| \leq k\,|x_1 - \lambda| \leq k^2\,|b - a|,$$

$$\dots \quad \dots$$

$$|x_n - \lambda| \leq k\,|x_{n-1} - \lambda| \leq k^n\,|b - a|,$$

y se tiene

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - \lambda| = \lim_{n \to \infty} k^n |b - a| = 0.$$

El error que se comete al tomar el valor aproximado x_n, en lugar de la raíz λ, está acotado por $|x_n - \lambda| \leq k^n\,|b - a|$.

Observación: Un problema importante que presenta este método es la forma de elegir la expresión de la función g.

Para una ecuación de la forma $f(x) = 0$, se pueden considerar distintas expresiones de g, como por ejemplo

$$g(x) = x - \mu f(x) \text{ con } \mu \neq 0; \quad g(x) = x - \text{sen } f(x); \quad g(x) = x - (f(x))^2,$$

y según como sea de adecuada de la elección de g, se consigue una mayor eficacia del método.

Como norma, debe intentarse una expresión de g tal que la función derivada esté acotada, en valor absoluto, por un número menor que 1, en un entorno de la desconocida raíz.

Si, por ejemplo, se considera una expresión de la forma $g(x)= x - \mu f(x)$ con $\mu \neq 0$, y se considera el número $\mu = \dfrac{1}{f'(\lambda)}$, donde λ es la raíz desconocida, se tiene que $g'(\lambda) = 0$. Así pues, puede ser conveniente considerar un valor μ muy próximo a $\dfrac{1}{f'(\lambda)}$.

Se observa que si existe un número k tal que $1 < k \leq |g'(x)|$, para todo $x \in [a,b]$, entonces para cualquier primera aproximación de la raíz, $x_0 \in [a,b]$, la sucesión (x_n) es divergente, puesto que

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) + g(x_{n-1})| = |g'(x_n)||x_n - x_{n-1}|$$

$$|x_{n+1} - x_n| > k|x_n - x_{n-1}| > |x_n - x_{n-1}| .$$

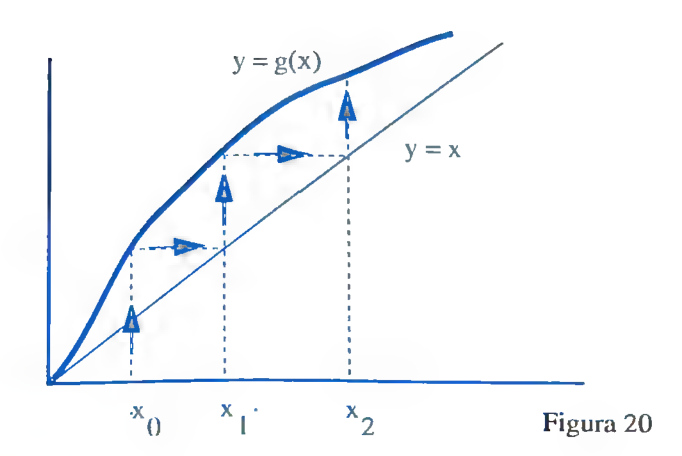


Figura 20

Ejemplo 5

Determinamos el punto de corte de las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \text{sen}\, x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2\pi x - 2 .$$

Los puntos de corte de ambas gráficas verifican la ecuación

$$\text{sen}\, x^2 = 2\pi\, x - 2.$$

Se considera la función $t(x) = \dfrac{2 + \text{sen} x^2}{2\pi}$, que es derivable. Al aplicar el Teorema del valor medio se tiene que

$$t(x) - t(y) = \frac{2c}{2\pi} \cos c^2 (x - y) \leq x - y ,$$

siendo c un determinado punto perteneciente a [x, y], y supuesto que los puntos x, y pertenecen al intervalo [-π, π].

Tomamos: $x_0 = 0$ y $x_n = t(x_{n-1})$

Tabla 12.4

n	x_n
1	0
2	0,318309886183791
3	0,334408076419422
4	0,336070913356693
5	0,336247235330681
6	0,336265981933876
7	0,336267975641599
8	0,336268187679474
9	0,336268210230525
10	0,336268212628918
11	0,336268212883996
12	0,336268212911125
13	0,336268212914010
14	0,336268212914317
15	0,336268212914350
16	0,336268212914353
17	0,336268212914354

valor aproximado 0,336268, con error menor que 10^{-7}.

Problemas Propuestos

1) Determinar un valor aproximado del número $\sqrt[7]{121}$.

2) Resolver aproximadamente la ecuación x - tg x = 0, para valores de x contenidos en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

3) Determinar aproximadamente las raíces de la ecuación polinómica

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$$

4) Determinar los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

5) Determinar el valor de x para el cual la función $f(x) = (2x)^x$ toma el valor 6.

6) Determinar los cortes de la gráfica de la función f con el eje OX,

$$f(x) = x^4 - x - 1.$$

Capítulo 13

Interpolación Polinómica

El planeta Urano fue descubierto, 1781, por el astrónomo W. Herschel (1738-1822) con un telescopio de fabricación casera. La órbita de este planeta fue calculada a partir de unas pocas observaciones muy separadas entre sí, basándose en las Leyes de Kepler. Además, se calculó que la distancia media del planeta al Sol era aproximadamente el doble que la distancia correspondiente a Saturno, y que el planeta requería 84 años para recorrer su órbita. En 1830 los datos empíricos acumulados pusieron de manifiesto desviaciones inexplicables de la órbita prevista, entonces algún astrónomo pensó que quizás la Ley de la Gravitación Universal de Newton no era válida para distancias tan grandes como la de Urano al Sol, sin embargo otros astrónomos sospecharon que quizás las perturbaciones eran debidas a un cometa o a un planeta más lejano aún no descubierto.

J.C. Adams(1819-1892), estudiante de bachillerato de Cambridge, calculó la influencia de un planeta desconocido en las posiciones observadas de Urano, suponiendo válida la Ley de la Gravitación Universal, e instó al Real Observatorio de Greenwich a buscar dicho planeta en 1845.

De forma independiente y casi simultánea, J.J. Leverrier (1811-1877) realizó un cálculo parecido y pidió a J. Galle, jefe del Observatorio de Berlín, que lo confirmara. Este descubrió al planeta Neptuno casi exactamente en la posición que se le había indicado. Se puede considerar este hecho como no sólo un triunfo de la Ley de Gravitación de Newton si no como uno de los primeros triunfos del **Análisis Numérico** .

Este tema se dedica a la interpolación de funciones y contiene algunos de los principios básicos que se necesitan utilizar en Análisis Numérico.

Sección

13-1 Introducción a la aproximación polinomial

En el Capítulo 6 se estudia la forma en la cual una función f, con derivadas sucesivas continuas en un punto x_0, puede ser aproximada por un polinomio de grado arbitrario, denominado polinomio de Taylor. Igualmente se analiza el error que se comete al emplear, en lugar del valor de la función en un punto próximo a x_0, el valor del polinomio en dicho punto. La idea que se desarrolla en este capítulo es la misma, tan sólo se destaca el carácter global de esta aproximación en oposición al carácter local de la aproximación que tiene el polinomio de Taylor.

Dada una función f definida en el intervalo [a,b] y una familia de funciones $\{g_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, se trata de encontrar una combinación de funciones g_k, de forma que esta combinación se aproxime, en algún sentido, a la función f. Cabe destacar como situación más sencilla una combinación tipo lineal, es decir, f(x) se aproxima por una expresión del tipo $g(x) = a_1 g_1(x) + ... + a_k g_k(x)$ con $a_1,...,a_k \in \mathbf{R}$.

Podemos destacar los siguientes criterios de aproximación:

- **Aproximación exacta o de interpolación**: La función f(x) y la combinación lineal g(x) coinciden hasta la derivada r-esima en m+1 puntos del dominio $x_0 ... x_m$.

- **Aproximación mínimos cuadrados**: La combinación lineal g(x) minimiza la siguiente integral.

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx .$$

- **Aproximación error mínimo-máximo**: La combinación lineal g(x) minimiza la siguiente expresión.

$$\sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [a,b]\} .$$

La familia de funciones que se consideran a lo largo del capítulo es

$\{x^k\}$, $k \in \mathbf{N}$, por lo tanto, el tema trata de encontrar una función polinómica, de grado n, que aproxime a la función f en [a,b].

Entre las ventajas que tiene realizar aproximaciones polinómicas destacan:

- Las aproximaciones polinómicas son funciones fáciles de integrar y diferenciar.

- Si se considera la aproximación polinómica

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k,$$

entonces los coeficientes son los mismos si se realiza un cambio del sistema de referencia,

$$P_k(x + \alpha) = a_0 + a_1(x-\alpha) + ... + a_k(x-\alpha)^k.$$

- Si se cambia de escala, entonces tan sólo se modifican los coeficientes $P_k(rx) = a_0 + a_1 rx + ... + a_k r^k x^k$. Es decir, no varía la forma de aproximación.

- Como los ordenadores realizan únicamente, en la práctica, operaciones aritméticas, entonces estas funciones son fácilmente definibles en el ordenador.

13-1.1 Teorema de aproximación de Weierstrass

Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua en [a,b], entonces para cualquier número real $\varepsilon > 0$ existe un polinomio de grado n, $P_n(x)$ tal que

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Demostración

Esta es la demostración constructiva de Bernstein, en ella, se considera un cambio de variable adecuado de forma que el dominio [a,b] se transforme en [0,1]. Se consideran los polinomios

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Se comprobará que

$$\lim_{n \to \infty} B_n(x) = f(x), \quad \text{para cualquier } x \in [0,1],$$

es decir, para cualquiera $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que para cualquier $n > n_0$ se verifica que $|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon$.

Inicialmente, se presentan algunas igualdades que se utilizarán.

La primera igualdad considerada es el binomio de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n, \qquad (13\text{-}1.1.1)$$

de la que al derivar respecto a p y cambiar n de miembro, resulta que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k} = (p+q)^{n-1}.$$

Si se considera $p + q = 1$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k} = (p+q)^n,$$

y al multiplicar por p, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n p. \qquad (13\text{-}1.1.2)$$

Si se deriva la igualdad (13-1.1.2) respecto a p, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n} \binom{n}{k} p^{k-1} q^{n-k} = n(p+q)^{n-1} p + (p+q)^n,$$

al multiplicarla por p y dividir por n, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^{n-1} p^2 + \frac{(p+q)^n p}{n}. \qquad (13\text{-}1.1.3)$$

Si se particularizan las anteriores igualdades para $p = x$ y $q = 1 - x$, y se combinan (13-1.1.1), (13-1.1.2) y (13-1.1.3) se obtiene la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \qquad (13\text{-}1.1.4)$$

A continuación se analiza la diferencia entre el valor de la función y el valor del polinomio en un punto

$$f(x) - B_n(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - B_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

puesto que $1 = (x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

Al ser f es continua en [0,1], entonces f es uniformemente continua en [0,1], es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x_1, x_2 \in [0,1]$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ se verifica que $|f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{\varepsilon}{2}$, y f es acotada en [0,1], existe $M > 0$ tal que se cumple para todo $x \in [0,1]$ $|f(x)| \le M$.

Así pues, si k es tal que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta$, entonces $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$, además, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le 2M$ para todo $x \in [0,1]$ y todo $0 \le k \le n$:

Si $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta$ para cualquier k y se aplica (13-1.1.4), entonces

$$|f(x) - B_n(x)| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le$$

$$\le 2M\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n} \le \frac{M}{n\delta^2}.$$

Supuesto que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta$ para cualquier k, entonces

$$|f(x) - B_n(x)| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $x \in [0,1]$, se considera un número natural n tal que $\frac{M}{n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, con lo cual, aunque existan números k tales que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta$ y otros tales que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta$, se tiene que $|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon$.

13-1.2 Teorema de la interpolación polinómica

Sean $n \in \mathbf{N}$, n+1 puntos distintos de $\mathbf{R}$, $x_0,...x_n$, y n+1 números reales $\omega_0,...,\omega_n$. Entonces existe un único polinomio de grado n, $P_n(x)$, tal que

$$P_n(x_i) = \omega_i \quad \text{para cualquier subíndice } i = 0,...,n.$$

Demostración

Como la expresión de un polinomio de grado n es

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,$$

al considerar la función polinómica correspondiente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = \omega_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = \omega_n$$

que posee n ecuaciones lineales en las n incógnitas $a_0,...,a_n$.

Al aplicar el teorema de Rouché-Fróbenius se comprueba que es un sistema compatible y determinado, puesto que el rango de la matriz de coeficientes es n+1 debido a que su determinante (determinante de Vandermonde) es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{puesto que } (x_i \neq x_j).$$

Sección

13-2

Aproximación exacta. Polinomio de interpolación

Dada una función $f:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ continua en $[a,b]$ y $n+1$ puntos distintos del intervalo $[a,b]$, $x_0,...,x_n$, se trata de hallar un polinomio de grado n, $P_n(x)$, de forma que $P_n(x_i) = f(x_i)$ para cualquier $i = 0,...,n$.

En este caso, se dice que el polinomio $P_n(x)$ es un **polinomio interpolador**, o de interpolación, de grado n de la función f en los nodos distintos $x_0,...,x_n$.

La existencia del polinomio de interpolación está asegurada por el Teorema de la interpolación polinómica (13-1.2) al igual que su unicidad. Así pues, tan sólo queda determinar dicho polinomio.

Para determinar al polinomio interpolador de grado n relativo a los $n+1$ nodos $x_0,...,x_n$ existen diversos métodos. A continuación se describen algunos de estos métodos.

13-2.1 Determinación del polinomio interpolador mediante un sistema de ecuaciones

Este método se basa en el sistema utilizado en la demostración del Teorema de interpolación polinómica (13-1.2), es decir, al considerar los valores de la función continua f en los $n+1$ nodos distintos $x_0,...,x_n$ contenidos en $[a,b]$ y al polinomio interpolador de grado n relativo a los mencionados nodos y a los valores que toma la función f en ellos,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n.$$

Se considera el sistema de ecuaciones lineales de incógnitas $a_0,...,a_n$:

$$a_0 + a_1 x_0 + ... + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$..............................$$

$$a_0 + a_1 x_n + ... + a_n x_n^n = f(x_n)$$

que escrito en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_0 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Este sistema es un sistema compatible y determinado si todos los nodos son distintos, y se puede aplicar cualquier método de resolución de sistema de ecuaciones lineales: método de Gauss, regla de Cramer .... .

Ejemplo 1

Una empresa realiza el siguiente ensayo de producción de uno de sus productos:

Un mes con su número de empleados produce 8 Tm.

Un mes con el doble de empleados produce 18Tm.

Un mes con cuatro veces su plantilla produce 20Tm.

Un mes con ocho veces su plantilla produce 46Tm.

Se pide estimar el número de empleados oportuno para optimizar su producción.

Solución

Se consideran los puntos 1, 2, 4, 8 y los valores 8, 18, 20, 46. Se trata de determinar una función polinómica de tercer grado, $P_3(x)$, tal que

$$P_3(1) = 8 ; \quad P_3(2) = 18 ; \quad P_3(4) = 20 ; \quad P_3(8) = 46.$$

Si se expresa $P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, entonces

$$\begin{cases} a + b + c + d = 8 \\ a + 2b + 4c + 8d = 18 \\ a + 4b + 16c + 64d = 20 \\ a + 8b + 64c + 512d = 46 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 20 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es:

$$a=-\frac{262}{21}\ ,\ b=\frac{161}{6}\ ,\ c=-\frac{83}{12}\ ,\ d=\frac{47}{84}\ .$$

Se considera que la función

$$f(x)=-\frac{262}{21}+\frac{161}{6}x-\frac{83}{12}x^2+\frac{47}{84}x^3$$

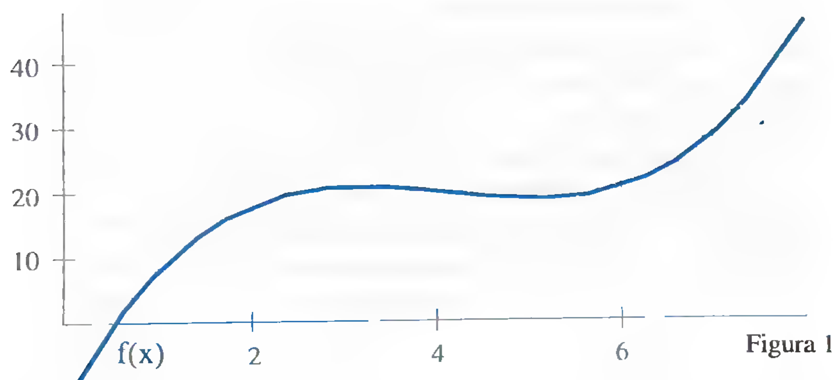


Figura 1

representa la producción de la empresa. Así pues, tan sólo queda optimizar la producción, para ello, se determina el máximo local.

La función derivada $f'(x)=\frac{161}{6}-\frac{83}{6}x+\frac{47}{28}x^2$ se anula,

$(\frac{161}{6}-\frac{83}{6}x+\frac{47}{28}x^2=0)$, en $x_1=\frac{581-7\sqrt{403}}{141}$ y $x_2=\frac{581+7\sqrt{403}}{141}$.

Al estudiar el valor de la segunda derivada se comprueba que el máximo local se alcanza para x_2, del cual , un valor aproximado es 3´3458.

13-2.2 Determinación del polinomio interpolador por el Método de Lagrange

Sean $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ una función continua y $x_0,\ldots,x_n$ n+1 nodos distintos contenidos en [a,b]. Se considera la siguiente expresión del polinomio interpolador de grado n, relativo a dichos nodos:

$$P_n(x)=L_n^0(x)\cdot f(x_0)+L_n^1(x)\cdot f(x_1)+\ldots+L_n^n(x)\cdot f(x_n)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot L_n^i(x)$$

donde $L_n^i(x)$, con i=0...n, es un polinomio de grado n de forma que

$$L_n^i(x_j) = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} son los símbolos de Kronecker, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$, y cada polinomio $L_n^i(x)$ tiene los ceros $x_0,\ldots,x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n$, por tanto, puede expresarse de la forma

$$L_n^i(x) = C_i(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n) = C_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j),$$

donde los coeficientes C_i se determinan a paretir de que $L_n^i(x_i)=1$, es decir,

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},$$

luego,

$$L_n^i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

y, por tanto,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right).$$

Esta expresión del polinomio de interpolación es conocida como **forma de Lagrange** del polinomio de interpolación de grado n relativo a los n+1 nodos distintos $x_0,\ldots, x_n$.

Al ser aproximada la función f por el polinomio de interpolación P_n en el intervalo [a,b], entonces para cada punto $x \in [a,b]$ se produce un error E(x) al considerar el valor $P_n(x)$ en lugar de f(x), $E(x) = f(x) - P_n(x)$.

La estimación del error en esta situación se analiza en el siguiente resultado.

13-2.3 Teorema

Sean f una función n+1 veces derivable con funciones derivadas

sucesivas continuas en [a,b], $f \in C^{n+1}([a,b])$, n+1 nodos distintos, $x_0,\ldots, x_n$, y P_n el polinomio de interpolación de grado n relativo a los nodos mencionados. Entonces para cada $x \in [a,b]$ existe un punto $\xi \in (a,b)$ tal que

$$E(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) .$$

Demostración

Para un punto $z \in [a,b]$, se considera la función

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - C \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

para $t \in [a,b]$, y donde C es una constante tal que

$$f(z) = P_n(z) + C \prod_{i=0}^{n} (z - x_i) ,$$

La función g se anula en n+2 puntos distintos; los n+1 nodos y el punto z que ordenamos de menor a mayor y denotamos $y^0_0,\ldots,y^0_{n+1}$.

En cada intervalo $[y^0_i ,y^0_{i+1}]$ con $i = 0,\ldots,n$ la función g verifica las hipótesis del Teorema de Rolle (5-3.1) pues $f(y^0_i) = f(y^0_{i+1}) = 0$. Luego, existe un punto en cada intervalo (y^0_i ,y^0_{i+1}) donde se anula la función derivada primera g', por tanto, la función g' tiene n+1 ceros en el intervalo $[y^0_0 ,y^0_{n+1}]$; que denotamos $y^1_0,\ldots,y^1_n$.

En cada intervalo $[y^1_i ,y^1_{i+1}]$, con $i = 0,\ldots,n-1$, se aplica el Teorema de Rolle a la función g' , así pues, la función g'' tiene n ceros en el intervalo $[y^1_0 ,y^1_n]$; que denotamos $y^2_0,\ldots,y^2_{n-1}$.

Al reiterar sucesivamente este proceso se comprueba que la función derivada n-ésima $g^{(n)}$ tiene dos ceros en el intervalo $[y^{n-1}_0 ,y^{n-1}_2]$; y^n_0 ,y^n_1. Existe un punto $\xi \in [y^n_0 ,y^n_1]$ tal que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, es decir,

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = 0.$$

Luego, por ser $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$, se tiene que $C = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Ejemplo 2

Para determinar el polinomio de interpolación de segundo grado relativo a los nodos -2, 0, 1 de una función f de la cual se conocen los valores f(-2) = 6, f(0) = 2 y f(1) = 3 por el método de Lagrange se procede de la forma siguiente: Se consideran $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,

$$L_2^0(x) = \frac{x}{-2}\frac{x-1}{-3} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x\,,$$

$$L_2^1(x) = \frac{x+2}{2}\frac{x-1}{-1} = \frac{-1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\,,$$

$$L_2^2(x) = \left(\frac{x+2}{3}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\,.$$

Luego,

$$P_2(x) = f(x_0)L_2^0(x) + f(x_1)L_2^1(x) + f(x_2)L_2^2(x) = x^2 + 2\,.$$

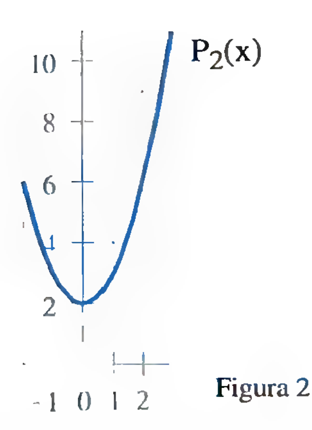


Figura 2

Si se elige otro nuevo nodo $x_3 = 3$ para el cual se tiene f(3) = 1, entonces la determinación de un polinomio de interpolación de grado 3 requiere realizar nuevamente los cálculos oportunos

$$L_3^0(x) = \left(\frac{x}{-2}\right)\left(\frac{x-1}{-3}\right)\left(\frac{x-3}{-5}\right) = \frac{-1}{30}x^3 + \frac{2}{15}x^2 - \frac{1}{10}x\,,$$

$$L_3^1(x) = \left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x-1}{-1}\right)\left(\frac{x-3}{-3}\right) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1,$$

$$L_3^2(x) = \left(\frac{x+2}{3}\right)\left(\frac{x}{1}\right)\left(\frac{x-3}{-2}\right) = \frac{-1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x,$$

$$L_3^3(x) = \left(\frac{x+2}{5}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{15}x.$$

Luego,

$$P_3(x) = f(x_0)L_3^0(x) + f(x_1)L_3^1(x) + f(x_2)L_3^2(x) + f(x_3)L_3^3(x),$$

$$P_3(x) = \frac{-1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 2.$$

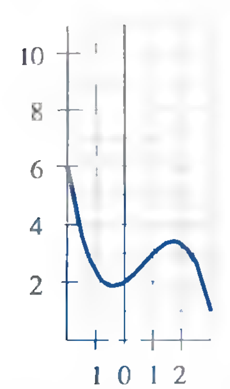


Figura 3

Si se considera $P_2(-1)$ como el valor de $f(-1)$ se comete un error

$$E(-1) = \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}(-1+2)(-1)(-1-1) = \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3},$$

donde $\xi_2 \in (-2,1)$ y supuesto que $f \in C^3[-2,1]$.

Si se considera $P_3(-1)$ como el valor de $f(-1)$ se comete un error

$$E(-1) = \frac{f^{(4)}(\xi_3)}{4!}(-1+2)(-1)(-1-1)(-1-3) = \frac{-f^{(4)}(\xi_3)}{3}$$

donde $\xi_3 \in (-2,3)$ y supuesto que $f \in C^4[-2,3]$.

Observación: El error cometido al tomar el valor del polinomio de interpolación depende de los nodos elegidos y de la función derivada n-ésima valorada en un punto desconocido. Si no se tiene una condición de

acotación de esta función derivada, resulta imposible estimar el error.

El método de Lagrange es aplicable a cualquier conjunto de nodos distintos, si bien, cabe destacar que la adición de un nuevo nodo obliga a iniciar los cálculos. Conocer el polinomio de interpolación de grado n relativo a los nodos $x_0,...,x_n$, no aporta información para determinar el polinomio de interpolación de grado n+1 relativo a los nodos $x_0,...,x_{n+1}$. No basta con añadir un monomio más, sino que se debe iniciar todo el proceso de cálculo. Es decir, el polinomio interpolador de grado n+1 no se construye a partir del polinomio interpolador de grado n.

13-2.4 Determinación del polinomio interpolador por el Método de Newton

Sean $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ una función continua y $x_0,...,x_n$ n+1 nodos distintos contenidos en [a,b]. Se considera la siguiente expresión del polinomio interpolador de grado n relativo a los nodos mencionados:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + ... + a_n(x-x_0)...(x-x_{n-1}).$$

Los coeficientes se determinan con el sistema de ecuaciones siguiente:

$$f(x_0) = a_0$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0)$$

$$...$$

$$f(x_n) = a_0 + a_1(x_n-x_0) + a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1) + ... + a_n(x_n-x_0)...(x_n-x_{n-1})$$

Denotamos de una nueva forma a estos coeficientes

$$a_0= f[x_0]\,,\ a_1= f[x_0,x_1]\,,\ a_2= f[x_0,x_1,x_2]...\ a_n= f[x_0,...,x_n],$$

donde cada expresión de la forma $f[x_0,...,x_i]$ se denomina **diferencia dividida de orden i**.

De la primera ecuación se tiene que $f(x_0) = a_0 = f[x_0]$, así pues, se define $f[x_i] = f(x_i)$ para $i = 0,...,n$.

De las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$a_1= \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0,x_1],$$

así pues, se define $f[x_{i-1},x_i]= \dfrac{f[x_i] - f[x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}}$, para $i = 1,...,n$.

Análogamente se determinan los otros a_i, se expresan respecto a las

diferencias divididas y se define de forma recursiva:

$$f[x_0, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Al resolver el sistema por el método de Gauss se comprueba que estas diferencias se expresan, también, como:

$$f[x_0, \dots, x_i] = \sum_{k=0}^{i} \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{i} (x_k - x_j)}, \text{ para } i = 1, \dots n.$$

Esquemáticamente las diferencias divididas se pueden representar en la siguiente tabla en forma triangular:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & \dots & & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] \ \dots & \dots & \\
 & & f[x_2,x_3] & \dots & \dots & f[x_0,\dots,x_n]. \\
x_3 & f[x_3] & & \dots & \dots & \\
\dots & \dots & & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & & \\
\dots & \dots & f[x_{n-1},x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}$$

El polinomio interpolador tiene la expresión

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}),$$

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right).$$

Esta última expresión del polinomio interpolador es conocida como la **forma de Newton en diferencias divididas** del polinomio interpolador de grado n relativo a los n+1 nodos distintos $x_0,\dots,x_n$.

Al considerar un nuevo nodo x_{n+1} distinto de los anteriores, entonces el polinomio interpolador de grado n+1 relativo a los nodos $x_0,\dots,x_{n+1}$, tiene la expresión

$$P_{n+1}(x) = b_0 + b_1(x\text{-}x_0) + b_2(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1) + ... + b_{n+1}(x\text{-}x_0)...(x\text{-}x_n)$$

y verifica que $\qquad b_0 = a_0, b_1 = a_1, ..., b_n = a_n$

donde $a_0,...,a_n$ son los coeficientes del polinomio interpolador de grado n, relativo a los nodos, $x_0,...,x_n$, es decir,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, ..., x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \ .$$

No tener que iniciar los cálculos desde el principio al añadir un nodo distinto más, confiere una mayor utilidad a la forma en diferencias divididas que a la forma de Lagrange a la hora de estudiar el número de nodos que deben elegirse para una mejor interpolación.

Ejemplo 3

Para determinar los polinomios interpoladores de segundo y tercer grado del Ejemplo 2 por el método de diferencias divididas, utilizando la segunda expresión de estas, se procede de la siguiente forma:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x\text{-}x_0) + a_2(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1).$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x\text{-}x_0) + a_2(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1) + a_3(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2).$$

$a_0 = f(x_0) = 6$

$$a_1 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{6}{-2} + \frac{2}{2} = -2$$

$$a_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + ... + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = ... = 1$$

$$a_3 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + ... = ... = -\frac{1}{3} \ .$$

Luego,

$$P_2(x) = 6 - 2(x+2) + (x+2)x = x^2+2.$$

$$P_3(x) = 6 - 2(x+2) + (x+2)x - \frac{1}{3}(x+2)x(x-1) =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 2 \ .$$

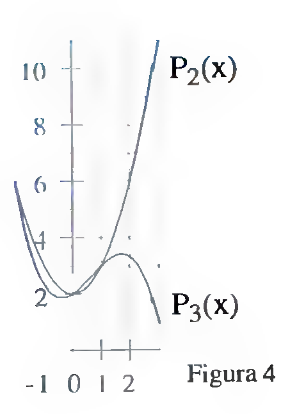


Figura 4

Ejemplo 4

Para poder determinar un valor aproximado de sen 50° conocidos los valores de la función seno para los ángulos 0°, 30°, 45°, 60° y 90° se procede de la siguiente forma. Se construye la tabla en diferencias divididas empleando la primera expresión de las diferencias divididas.

$x_0=0$	0				
		0´0167			
$x_1=30$	0´5		-0´0001		
		0´0138		0	
$x_2=45$	0´7071		-0´0001		0
		0´0106		0	
$x_3=60$	0´8660		-0´0001		
		0´0045			
$x_4=90$	1				

Dado que las diferencias divididas de orden tres son nulas se pueden considerar tres polinomios interpoladores de segundo grado.

- $P_2(x)$ corresponde a los nodos x_0, x_1, x_2,

$P_2(x) = 0´0167x - 0´0001x(x-30)$ $\rightarrow P_2(50) = 0´7550.$

- $Q_2(x)$ corresponde a los nodos $x_1, x_2, x_3,$

$Q_2(x) = 0'5 + 0'0138(x-30) - 0'0001(x-30)(x-45) \rightarrow Q_2(50) = 0'7660$

- $T_2(x)$ corresponde a los nodos $x_2, x_3, x_4.$

$T_2(x)=0'7071+0'0106(x-45)-0'0001(x-45)(x-60) \rightarrow T_2(50) = 0'7651$

Como la función $f(x) = \text{sen } x$ es derivable sucesivamente con derivada acotada por 1, entonces el menor error cometido por las distintas aproximaciones es el que corresponde al menor valor de la expresión $(x-y_0)(x-y_1)(x-y_2)$, donde y_2, y_3, y_4 son los nodos correspondiente al polinomio interpolador. Se consideran los ángulos expresados en radianes.

$$E_P(x) \leq \frac{1}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \rightarrow E_P\left(\frac{5}{18}\pi\right) \leq 0'00444.$$

$$E_Q(x) \leq \frac{1}{3!}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \rightarrow E_Q\left(\frac{5}{18}\pi\right) \leq 0'00089.$$

$$E_T(x) \leq \frac{1}{3!}(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \rightarrow E_T\left(\frac{5}{18}\pi\right) \leq 0'00178.$$

El polinomio que mejor aproxima el cálculo de sen 50° es $Q_2(x)$.

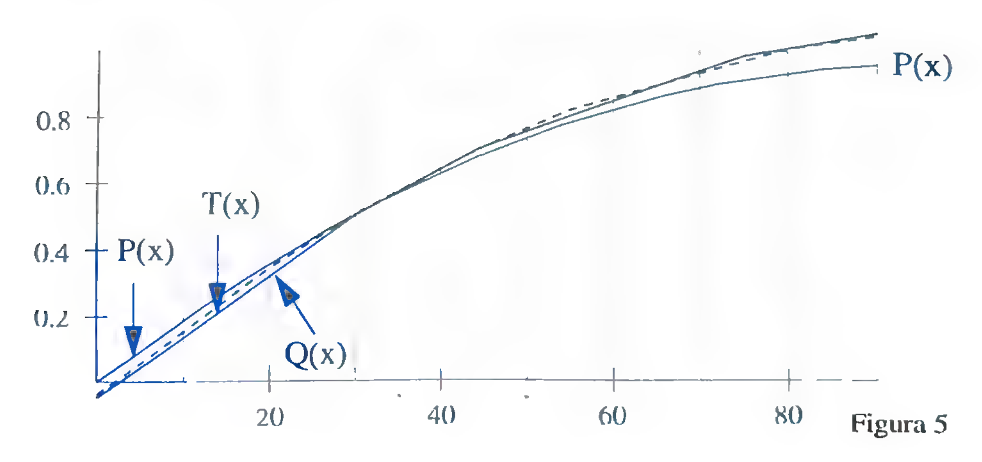


Figura 5

Sección

13-3 Interpolación relativa a nodos equidistantes

En este apartado se tratan las distintas expresiones del polinomio de interpolación relativo a un conjunto finito de nodos distintos, elegidos de tal forma que la distancia entre dos nodos consecutivos es constante, es decir, existe un número real h, tal que $x_i - x_{i-1} = h$ para cualquier subíndice i=1,...,n. La expresión de estos polinomios está relacionada con determinados operadores de funciones continuas denominados **Operadores en Diferencias Finitas.**

Trabajar con nodos equidistantes corresponde a situaciones reales en las cuales se extrae una ley de formación experimental. Para ello, se realizan mediciones experimentales con valores de una variable uniformemente espaciados, y si bien, la ley puede no ser encontrada, al menos, se obtiene una ley aproximada que es la relación dada por el polinomio interpolador relativo a los valores de la variable escogidos.

13-3.1 Operadores de Diferencias Finitas

Se denomina operador de funciones continuas a toda aplicación definida del espacio vectorial de las funciones continuas definidas de [a,b] en **R**, C([a,b]), en sí mismo:

$$\begin{aligned} H: C([a,b]) &\to C([a,b]) \\ f &\to Hf \end{aligned}$$

Los operadores que se utilizan en este apartado son:

Operador en diferencias progresivas: Se representa por el símbolo Δ_h, donde $h \in \mathbf{R}$, y la función $\Delta_h f$ se define de la forma

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

para cualquier $x \in [a,b]$ tal que $x+h \in [a,b]$ y cualquier función $f \in C([a,b])$.

Operador en diferencias regresivas: Se representa por el símbolo ∇_h, donde $h \in \mathbf{R}$, y la función $\nabla_h f$ se define de la forma

$$\nabla_h f(x) = f(x) - f(x-h)$$

para cualquier $x \in [a,b]$ tal que $x-h \in [a,b]$ y cualquier función $f \in C([a,b])$.

Operador traslación, corrimiento o arrastre: Se representa por el símbolo E_h, donde $h\in\mathbf{R}$, y la función E_hf se define de la forma

$$E_hf(x) = f(x+h)$$

para cualquier $x\in[a,b]$ tal que $x+h\in[a,b]$ y cualquier función $f\in C([a,b])$.
Operador identidad: Se representa por el símbolo I, y la función If se define de la forma

$$If(x) = f(x)$$

para cualquier $x\in[a,b]$ y cualquier función $f\in C([a,b])$.

Si no hay duda de cual es el número h, entonces suelen emplearse los símbolos Δ, ∇ y E en lugar de Δ_h, ∇_h y E_h.

Se definen las siguientes leyes de composición de operadores,

• *Suma de operadores:* Sean B_1 y B_2 dos operadores. El operador B_1+B_2 es tal que la función $(B_1+B_2)f$ se define de la forma $(B_1+B_2)f(x) = B_1f(x) + B_2f(x)$, para cualquier $x\in[a,b]$ y cualquier función $f\in C([a,b])$.

La suma de operadores tiene las mismas propiedades que la suma de números reales.

• *Producto de un número y un operador:* Sean B un operador B y α un número real. El operador αB es tal que la función $(\alpha B)f$ se define de la forma $(\alpha B)f(x) = \alpha\cdot Bf(x)$, para cualquier $x\in[a,b]$ y cualquier función $f\in C([a,b])$.

La suma y el producto por un número dotan al conjunto de operadores de estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo **R**.

• *Producto o composición de operadores*: Sean B_1 y B_2 dos operadores. El operador $B_1\cdot B_2$ es tal que la función $(B_1\cdot B_2)f$ se define de la forma $(B_1\cdot B_2)f(x) = B_1(B_2f)(x)$, para cualquier $x\in[a,b]$ y cualquier función $f\in C([a,b])$.

El producto de operadores posee la propiedad asociativay elemento unidad, además, el producto de estos operadores conmuta..

Como consecuencia de la definición de composición de operadores se

introducen las potencias de operadores

$$B^{n+1} = B \cdot B^n$$

para cualquier número natural n, y para cualquier operador B. Además, se cumple la propiedad

$$B^{n+m} = B^n \cdot B^m.$$

Los operadores Δ , ∇ y E son operadores lineales. Un operador B se dice que es lineal si verifica la igualdad

$$B(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) = \alpha \cdot Bf(x) + \beta \cdot Bg(x), \text{ para todo } x \in [a,b]$$

para cualquiera $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ y $f, g \in C([a,b])$.

También, se verifican las igualdades $\nabla = \Delta \cdot E$ y $\Delta = E - I$.

13-3.2 Tabla de diferencias sucesivas de una función

Sea f una función continua en el intervalo [a,b] y n+1 nodos equidistantes, es decir,

$$x_{i+1} = x_i + h, \text{ para todo } i = 0,\dots,n-1 \text{ y } h \in \mathbf{R}\text{-}\{0\}.$$

Se denomina **triángulo** o tabla **de diferencias progresivas** de la función f relativo a los nodos $x_0,\dots,x_n$ a la siguiente distribución de valores de la función y de sus diferencias sucesivas:

x_0	$f(x_0)$						
		$\Delta f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$				
		$\Delta f(x_1)$		...			
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	...	...	...	
		$\Delta f(x_2)$		...	...	...	$\Delta^n f(x_0)$
x_3	$f(x_3)$			...	...		
...	...		$\Delta f^2(x_{n-2})$				
...	...	$\Delta f(x_{n-1})$					
x_n	$f(x_n)$						

De igual manera a como se describe el triángulo de diferencias progresivas, se describe el triángulo de diferencias regresivas de una función relativo a un conjunto de nodos uniformemente espaciados,

x_0	$f(x_0)$						
		$\nabla f(x_1)$					
x_1	$f(x_1)$		$\nabla^2 f(x_2)$				
		$\nabla f(x_2)$		...			
x_2	$f(x_2)$		$\nabla^2 f(x_3)$...	...	...		
		$\nabla f(x_3)$	...	...	...		$\nabla^n f(x_n)$
x_3	$f(x_3)$			...	...		
...	...		$\nabla f^2(x_n)$				
...	...	$\nabla f(x_n)$					
x_n	$f(x_n)$						

El número de elementos del triángulo de diferencias de la función f relativa a los nodos $x_0,...,x_n$ es $\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}$, de los cuales, únicamente, n +1 son independientes, es decir, no son combinación lineal del resto, puesto que hay $\frac{n\,(n+1)}{2}$ relaciones.

Los n +1 valores $f(x_0),...,f(x_n)$ determinan el triángulo en diferencias, pero n+1 elementos independientes de dicho triángulo, es decir, un valor de cada columna de las distintas diferencias, también determinan el triángulo, por ejemplo,

$$f(x_0),\quad \Delta f(x_0)...,\quad \Delta^n f(x_0)\,,$$

o

$$f(x_2),\quad \Delta f(x_1),\quad \Delta^2 f(x_0)...,\quad \Delta^n f(x_0).$$

Puede ocurrir que al evaluar los valores de la función en los nodos se cometa un error ε para un determinado nodo, por ejemplo, x_3. El error cometido se propaga al calcular las diferencias sucesivas de la forma que muestra la siguiente tabla. Dichos errores se extienden en forma de triángulo opuesto a la tabla de diferencias con tantos términos de la columna de la diferencia k-ésima como términos posee el desarrollo del binomio $(a\text{-}b)^k$, y con los mismos coeficientes que los del binomio anterior:

x_0	$f(x_0)$					
		$\Delta f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$			
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)+\varepsilon$		
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)+\varepsilon$		...	
		$\Delta f(x_2)+\varepsilon$		$\Delta^3 f(x_1)-3\varepsilon$		...
x_3	$f(x_3)+\varepsilon$		$\Delta^2 f(x_2)-2\varepsilon$			
		$\Delta f(x_3)-\varepsilon$		$\Delta^3 f(x_2)+3\varepsilon$		...
x_4	$f(x_4)$		$\Delta^2 f(x_3)+\varepsilon$			
		$\Delta f(x_4)$		$\Delta^3 f(x_3)-\varepsilon$	...	
x_5	$f(x_5)$		$\Delta^2 f(x_4)$			
		$\Delta f(x_5)$				
x_6	$f(x_6)$					

Ejemplo 5

La diferencia de orden k+1 de la función $f(x) = x^k$, con $k \in \mathbf{N}$ para cualquier nodo x_0 es nula. Esto se prueba por inducción

Sea $f(x) = x$, entonces

$\Delta[x_0] = x_0 + h - x_0 = h$, $\Delta[x_1] = x_1 + h - x_1 = h$, $\Delta^2[x_0] = \Delta[x_1] - \Delta[x_0] = 0$, donde $\Delta[x_0]$ denota $\Delta f(x_0)$ y $\Delta^2[x_0]$ denota $\Delta^2 f(x_0)$.

Sea $f(x) = x^{k-1}$. Si $\Delta^k f(x_i) = 0$, y lo denotamos por $\Delta^k[x^{k-1}] = 0$, entonces debe comprobarse que $\Delta^{k+1}[x^k] = 0$.

$$\Delta^{k+1}[x_0^k] = \Delta^k[\Delta[x_0^k]] = \Delta^k[(x_0+h)^k - x_0^k] = \Delta^k\left[\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x_0^i h^{k-i}\right],$$

como Δ es un operador lineal y Δ^k también lo es, se tiene

$$\Delta^{k+1}[x_0^k] = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} h^{k-i} \Delta^k [x_0^i] = 0.$$

Además, como $\Delta^{k+1}[x_0^k] = 0$, entonces $\Delta^k[x_0^k]$ es constante para cualquier nodo x_0, es decir, $\Delta^k[x_0^k]=...=\Delta^k[x_n^k]$.

13-3.3 Polinomios Factoriales

El operador diferencia tiene cierta analogía con el operador derivada de funciones que a cada una función se le hace corresponder su función derivada. Al igual que la derivada n-ésima de una función polinómica de grado n es constante, se tiene que la diferencia de orden n, o diferencia n-ésima, de dicho función es también constante.

De la función $f(x) = x^n$ se tiene:

$$\Delta[x^n] = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} h^{n-i} x^i \quad \text{y} \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$

Como la diferencia de $f(x) = x^n$ no tiene una expresión cómoda de operar con diferencias, se presentan otras funciones polinómicas tales que su diferencia se calcula con una expresión análoga a la derivada de x^n, estas son las denominadas funciones polinómicas factoriales.

Polinomios factoriales descendentes: Se escriben $x^{[n]}$ y se definen

$$x^{[0]} = 1 \quad , \quad x^{[n]} = x(x-1)...(x-n+1) \quad ,$$

$$x^{[-n]} = \frac{1}{(x+n)^{[n]}} = \frac{1}{(x+1)\,...\,(x+n)}$$

para $n \in \mathbf{N}$, y verifican las siguientes propiedades:

$$x^{[k]}(x-k)^{[n]} = x^{[k+n]} \quad , \quad (x-k)^{[n-k]} = \frac{x^{[n]}}{x^{[k]}} \quad , \quad \Delta x^{[k]} = kx^{[k-1]}$$

para cualquier $n, k \in \mathbf{N}$.

Polinomios factoriales ascendentes: Se escriben $x^{\{n\}}$ y se definen

$$x^{\{0\}} = 1 \quad , \quad x^{\{n\}} = x(x+1)...(x+n-1) \quad ,$$

$$x^{\{-n\}} = \frac{1}{(x-n)^{\{n\}}} = \frac{1}{(x-1)\,...\,(x-n)}$$

para $n \in \mathbf{N}$, y verifican las siguientes propiedades:

$$x^{\{k\}}(x+k)^{\{n\}} = x^{\{n+k\}}, \quad (x+k)^{\{n-k\}} = \frac{x^{\{n\}}}{x^{\{k\}}} \quad , \quad \nabla x^{\{k\}} = kx^{\{k-1\}}$$

para cualquier $n,k \in \mathbf{N}$.

Dada una función polinómica de grado n, $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, y n+1 nodos equidistantes $x_0,...,x_n$ se puede considerar la expresión:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + ... + c_n(x-x_0)...(x-x_{n-1}) =$$
$$\sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \ .$$

Al considerar el cambio de variable $u = \frac{x - x_0}{h}$, donde h es la distancia entre dos nodos consecutivos, se obtiene la expresión:

$$P_n(x) = P_n(x_0+hu) = c_0 + c_1hu + c_2h^2u(u-1) + ... + c_nh^nu...(u-n+1) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} c_i h^i u^{[i]} \ .$$

Se puede suponer directamente que el polinomio P_n se expresa como combinación de polinomios factoriales,

$$Q_n(u) = d_0 + d_1 u^{[1]} + d_2u^{[2]} + ... + d_nu^{[n]},$$

y tan sólo queda determinar los coeficientes d_i.

La forma de calcular los coeficientes d_i se basa en las propiedades del operador diferencia progresiva al actuar sobre polinomios factoriales descendentes.

Si se construye una tabla de diferencias progresivas sucesivas para el polinomio $P_n(x)$ correspondiente a los nodos $x_0,...,x_n$, entonces se puede considerar la tabla en diferencias de dicho polinomio expresado respecto a la variable u, $Q_n(u)$, correspondiente a los nodos 0,...n. Así pues, las dos tablas de diferencias coinciden.

Triángulo en la variable x

x_0	$P_n(x_0)$				
		$\Delta P_n(x_0)$			
x_1	$P_n(x_1)$		...	...	
		$\Delta P_n(x_1)$	...	...	$\Delta^n P_n(x_0)$
x_2	$P_n(x_2)$		...	...	
...	...		...		
x_n	$P_n(x_n)$				

Triángulo en la variable u

0	$Q_n(0)$				
		$\Delta Q_n(0)$			
1	$Q_n(1)$		...	...	
		$\Delta Q_n(1)$	...	...	$\Delta^n Q_n(0)$
2	$Q_n(2)$		...	...	
...	...		...		
n	$Q_n(x_n)$				

Por lo tanto, basta considerar las igualdades correspondientes a la diagonal superior,

$P_n[x_0] = Q_n[0] = d_0$ $\quad\quad$ $d_0 = P_n(x_0)$

$\Delta P_n(x_0) = \Delta Q_n(0) = 1!d_1$ $\quad\quad$ $d_1 = \Delta P_n(x_0)$

... $\quad\quad$ ...

$\Delta^n P_n(x_0) = \Delta^n Q_n(0) = n!d_n$ $\quad\quad$ $d_n = \dfrac{\Delta^n P_n(x_0)}{n!}$.

Así pues, la reordenación de un polinomio en polinomios factoriales descendentes tiene la expresión

$$Q_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k P_n(x_0)}{k!} u^{[k]} ,$$

donde $\Delta^0 P_n(x_0) = P_n(x_0)$, o lo que es lo mismo

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k P_n(x_0)}{k!h^k} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right).$$

De forma análoga a como se ha realizado la reordenación de un polinomio en polinomios factoriales descendentes para los nodos equidistantes $x_0,...,x_n$ se realiza la reordenación de un polinomio en polinomios ascendentes.

La expresión en diferencias regresivas del polinomio interpolador correspondiente a los nodos equidistantes $x_0,...,x_n$ es:

$$Q_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\nabla^k P_n(x_n)}{k!} u^{\{k\}} \quad \text{y}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\nabla^k P_n(x_n)}{k!h^k} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (x + x_{n-i}) \right),$$

donde $\nabla^0 P_n(x_0) = P_n(x_0)$.

Ejemplo 6

Para reordenar el polinomio $x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ en polinomios factoriales se consideran los nodos, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$, uniformemente espaciados, y se construye el triángulo de diferencias siguiente:

-1	-3			
		2		
0	-1		4	
		6		6
1	5		10	
		16		
2	21			

El polinomio es de la forma

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\Delta^k P_3(x_0)}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right) = -3 + 2(x+1) + \frac{4}{2!}(x+1)x +$$

$$+ \frac{6}{3!}(x+1)x(x-1) = -3 + 2(x+1) + 2(x+1)x + (x+1)x(x-1).$$

Sección 13-4

Polinomio interpolador correspondiente a nodos equidistantes

Cuando los nodos de interpolación están uniformemente separados, el cálculo de los coeficientes del polinomio interpolador se simplifica considerablemente.

Sean f una función continua definida en el intervalo [a,b] y $x_0,...,x_n$, n+1 nodos equidistantes contenidos en el intervalo [a,b]. Como el polinomio interpolador de grado n relativo a los nodos $x_0,...,x_n$, $P_n(x)$, verifica que toma los mismos valores que la función f en los nodos, entonces la función f y el polinomio P_n tienen el mismo triángulo de diferencias, es decir, el triángulo de diferencias de la función es el triángulo de diferencias del polinomio.

Dados n+1 nodos equidistantes y un triángulo de diferencias existe un único polinomio de grado n que posee ese triángulo para esos n+1 nodos. Así pues, se puede elegir expresar dicho polinomio reordenando respecto a polinomios factoriales, y se obtiene una expresión del polinomio interpolador, de la función con la cual se construye el triángulo, en polinomios factoriales que se denomina Forma de Newton-Gregory del polinomio interpolador.

- **Forma de Newton-Gregory en diferencias progresivas** y nodos $x_0,...,x_n$ expresado en la variable

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$, donde h es la distancia entre nodos consecutivos,

$$Q_n(u) = f(x_0) + ... + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} u^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} u^{[k]} ,$$

donde $\Delta^0 f(x_0) = f(x_0)$, y expresado respecto a los nodos:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right),$$

- **Forma de Newton-Gregory en diferencias regresivas** y nodos $x_0,\ldots,x_n$ expresado en la variable

$$u = \frac{x - x_n}{h}$$, donde h es la distancia entre nodos consecutivos,

$$Q_n(u) = f(x_n) + \ldots + \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!} u^{\{n\}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\nabla^k f(x_n)}{k!} u^{\{n\}},$$

donde $\nabla^0 f(x_0) = f(x_0)$, y expresado respecto a los nodos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\nabla^k f(x_k)}{k!h^k} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_{n-i}) \right).$$

Dar una expresión del polinomio interpolador correspondiente a n+1 nodos distintos consiste en determinar unos factores en los cuales se reordena el polinomio y elegir los coeficientes adecuados a esos factores. En un caso práctico, n = 4, se determinan cinco nodos consecutivos y se construye el triángulo en diferencia de la tabla que corresponde a la base elegida y un triángulo de factores. Por ejemplo:

Triángulo de diferencias

u-nodos	x-nodos					
u+2	x_{-2}	$f(x_{-2})$				
			$\Delta f(x_{-2})$			
u+1	x_{-1}	$f(x_{-1})$		$\Delta^2 f(x_{-2})$		
			$\Delta f(x_{-1})$		$\Delta^3 f(x_{-2})$	
u	x_0	$f(x_0)$		$\Delta^2 f(x_{-1})$		$\Delta^4 f(x_{-2})$
			$\Delta f(x_0)$		$\Delta^3 f(x_{-1})$	
u-1	x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$		
			$\Delta f(x_1)$			
u-2	x_2	$f(x_2)$				

Triángulo de monomios

u-nodos	x-nodos					
u+2	x_{-2}	u+2				
			u+2			
u+1	x_{-1}	u+1		u+2		
			u+1		u+2	
u	x_0	u		u+1		u+2
			u		u+1	
u-1	x_1	u-1		u		
			u-1			
u-2	x_2	u-2				

Se eligen 5 elementos independientes del triángulo de diferencias, es decir, se determina un camino, de cinco pasos, desde la base del triángulo en diferencias hasta el vértice del triángulo.

Los coeficientes de cada término los constituye la diferencia elegida partido por el factorial del orden de la diferencia.

El factor correspondiente se obtiene al marcar el camino en el triángulo de valores de la variable y tomar polinomios factoriales de índice el orden de la diferencia. Por ejemplo, elegido el camino,

$$f[x_0] \rightarrow \Delta f(x_0) \rightarrow \Delta^2 f(x_{-1}) \rightarrow \Delta^3 f(x_{-1}) \rightarrow \Delta^4 f(x_{-2})$$

y, por tanto, los factores

$$u \rightarrow u \rightarrow u+1 \rightarrow u+1 \rightarrow u+2$$

la expresión del polinomio interpolador es:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!} u^{[1]} + \frac{\Delta^2 f(x_{-1})}{2!} (u+1)^{[2]} +$$

$$+ \frac{\Delta^3 f(x_{-1})}{3!} (u+1)^{[3]} + \frac{\Delta^4 f(x_{-2})}{4!} (u+2)^{[4]} .$$

Al considerar un camino de este tipo se construye la forma avanzada de Gauss del polinomio interpolador.

Como ejemplo se puede elegir cualquier otro camino

$$f[x_0] \rightarrow \Delta f(x_{-1}) \rightarrow \Delta^2 f(x_{-2}) \rightarrow \Delta^3 f(x_{-2}) \rightarrow \Delta^4 f(x_{-2})$$

y los factores

$$u \rightarrow u+1 \rightarrow u+2 \rightarrow u+2 \rightarrow u+2$$

y queda la expresión:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_{-1})}{1!}(u+1)^{[1]} + \frac{\Delta^2 f(x_{-2})}{2!}(u+2)^{[2]} +$$

$$+ \frac{\Delta^3 f(x_{-2})}{3!}(u+2)^{[3]} + \frac{\Delta^4 f(x_{-2})}{4!}(u+2)^{[4]} .$$

Ejemplo 7

Para determinar una función que pase por los puntos (2,5) (3,7), (4,4), (5,0) y (6,10) se puede considerar el siguiente triángulo de diferencias progresivas

$x_0 = 2$	5				
		2			
$x_1 = 3$	7		-5		
		-3		4	
$x_2 = 4$	4		-1		11
		-4		15	
$x_3 = 5$	0		14		
		10			
$x_4 = 6$	10				

y se puede considerar la función polinómica cuya expresión en la forma de Newton-Gregory es:

$$f(x) = 5 + 2(x-2) - \frac{5}{2!}(x-2)(x-3) +$$

$$+ \frac{4}{3!}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{11}{4!}(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) ,$$

$$f(x) = \frac{11}{24}x^4 - \frac{23}{4}x^3 + \frac{577}{24}x^2 - \frac{155}{4}x + 25 .$$

Problemas Propuestos

1) Determinar una función polinómica de tercer grado cuya gráfica pasa por los puntos (-2,3), (0,-1), (3,-2) y (4,-3).

2) Una determinada ley formulada respecto a una cierta magnitud t se expresa mediante una función polinómica de cuarto grado. Después de realizar distintas mediciones se obtuvo la tabla

valor	t	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
valor	L	731	309	109	23	5	1	-1	3	43	173	471

Determinar dicha ley.

3) Al basarse en el conocimiento de una ley de formación dependiente del tiempo en unos instantes determinados; t = 1, t = 3, t = 7 y t = 10, se conjeturó que dicha ley tenía la expresión $f(t) = 3t^3 - 2t^2 - 4t + 2$, y se contrastó dicha ley para el instante t = 11, obteniéndose un valor de 8500 por medición. ¿Debe mantenerse como válida la mencionada expresión de la ley?. En caso contrario, conjeturar una expresión nueva.

4) Una calculadora da los siguientes valores de la función f(x) = log x

log(1)=0´0000, log(1´01)=0´0043, log(1´02)=0´0086, log(1´03)=0´0128, log(1´04)=0´0170, log(1´05)=0´0212, log(1´06)=0´0253, log(1´07)=0´0294, log(1´08)=0´0334, log(1´09)=0´0374 y log(1´10)=0´0414.

Interpretar la forma de calcular de dicha calculadora.

5) Determinar la distancia entre nodos equidistantes de manera que se pueda utilizar el polinomio interpolador correspondiente a cinco nodos equidistantes para la función $f(x) = e^x$ en el intervalo [-4, 4], con un error menor que 10^{-10}.

6) Determinar el error máximo que se comete al tomar el valor del polinomio interpolador de tercer grado correspondiente a cuatro nodos equidistantes en lugar del valor de la función f(x) = sen x en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Capítulo

14 Diferenciación e Integración Numérica

En este último capítulo utilizamos las fórmulas, de Newton y de Lagrange, del polinomio interpolador para determinar el valor de la derivada en un punto o la integral en un intervalo de una función de la cual tan sólo se conoce una tabla de valores.

Un error frecuente de estudiante es creer que se conoce algún método para determinar una función primitiva de casi todas la funciones que comúnmente maneja. En general, se puede considerar que una gran número de estas funciones primitivas son calculables por él, sin embargo, se hace notar que la integral definida siguiente no puede ser calculada por la Regla de Barrow:

$\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}dx$.

Otra situación frecuente se presenta al conocer el integrando f(x) de forma discreta, con lo cual no tiene sentido hablar de función primitiva.

En el lenguaje clásico se denominó **cuadratura mecánica** al cálculo numérico de una integral simple; este tipo de integración era conocido en el saber matemático de la Grecia Clásica, puesto que se aplicaba la denominada, actualmente, regla de Simpson.

El problema principal de los métodos numéricos de cálculo de integrales era los complicados y tediosos cálculos que estos acarreaban, problema, que con la implantación social de los ordenadores, casi ha desaparecido.

Sección

14-1

Diferenciación numérica

Si una magnitud y depende de otra magnitud x , y dicha dependencia se representa de la forma

$y = f(x)$

donde $f \in C^1([a,b])$, es decir, f es una función derivable con función derivada continua en [a,b], puede ocurrir que se desee conocer la **razón de variación** de la magnitud y respecto a x para una valor de esta variable x_0

$$\text{Razón Variación}_{x_0} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_0} = f'(x_0) .$$

Si la función f sólo es conocida en un conjunto finito de puntos, o si se conoce la expresión analítica de la función f, pero la función f´ es difícil de evaluar en un punto x_0, entonces recurrimos a la obtención de una aproximación numérica del valor $f'(x_0)$. Al proceso de aproximación del valor $f'(x_0)$ se le denomina **diferenciación numérica.**

Al considerar el cálculo de la derivada en un punto z_0 de una función como la actuación de la aplicación definida sobre las funciones derivables en el punto z_0 que a una función le hace corresponder la derivada de la función en el punto z_0, y que denominamos D,

$$f \rightarrow Df(x) = f'(z_0)$$

caben dos estrategias distintas:

- Obtener una aproximación de $f'(z_0)$ al considerar la actuación de la aplicación D en lugar de sobre f sobre una aproximación polinómica P_n de dicha función.
- Obtener una aproximación de $f'(z_0)$ al considerar la actuación de otra aplicación que aproxime a la aplicación D sobre la función f.

La bondad de cada una de estas estrategias depende de la naturaleza de la función f y del conocimiento que se tenga de ella. Si se considera P_n como el polinomio interpolador de la función f relativo a los n+1 nodos

distintos $x_0, \ldots, x_n$, puede ocurrir que $P_n(x)$ sea una buena aproximación de la función f(x) y, sin embargo, $P_n'(x)$ no sea una aproximación adecuada de la función f´(x); basta imaginarse dos funciones cuyas gráficas están muy próximas y cuyas rectas tangentes en algún punto estén muy separadas.

14-1.1 Derivación mediante interpolación

Sean f una función con función derivada m-ésima continua en [a,b], $f \in C^m([a,b])$, y P_n el polinomio interpolador de la función f relativo a los nodos $x_0, \ldots, x_n$, supuesto $n+2 < m$. Se tiene que para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

y si se deriva esta igualdad se obtiene

$$f'(x) = P'_n(x) + \left[\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right]',$$

con lo cual al sustituir $P'_n(x)$ en lugar de f´(x) se produce un error:

$$E'(x) = \left[\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right]'.$$

Para evaluar dicho error se considera la forma de Lagrange del polinomio interpolador y la función

$$W_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

con lo cual,

$$W'_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) \right)$$

y en particular, $W'_n(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)$.

Al considerar valores de x distintos de los nodos se tiene

$$\frac{f(x)}{W_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{1}{W'_n(x_i)} \frac{1}{(x - x_i)} + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

y al derivar se obtiene

$$\left[\frac{f(x)}{W_n(x)}\right]' = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{1}{W'_n(x_i)} \frac{-1}{(x - x_i)^2} + \left[\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\right]' .$$

Si se toma un nuevo nodo x_{n+1} y un número $\xi_1 \in (x_0, x_{n+1})$ se tiene

$$\frac{f(x_{n+1})}{W_n(x_{n+1})} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{1}{W'_n(x_i)} \frac{1}{(x_{n+1} - x_i)} + \frac{f^{n+1}(\xi_1)}{(n+1)!} ,$$

y

$$\frac{\dfrac{f(x)}{W_n(x)} - \dfrac{f(x_{n+1})}{W(x_{n+1})}}{x - x_{n+1}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{W'_n(x_i)} \frac{-(x - x_{n+1})}{(x - x_i)(x_{n+1} - x_i)}}{x - x_{n+1}} +$$

$$+ \frac{f^{n+1}(\xi) - f^{n+1}(\xi_1)}{(n+1)!\,(x - x_{n+1})} .$$

Al aplicar el teorema del incremento finito se asegura que existe $\eta \in \mathbf{R}$ comprendido entre ξ y ξ_1 tal que $\dfrac{f^{n+1}(\xi) - f^{n+1}(\xi_1)}{(\xi - \xi_{n+1})} = f^{n+2}(\eta)$,

$$\text{luego } \left[\frac{f(x)}{W_n(x)}\right]' = \lim_{x_{n+1} \to x} \frac{\dfrac{f(x)}{W_n(x)} - \dfrac{f(x_{n+1})}{W(x_{n+1})}}{x - x_{n+1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{W'(x_i)} \frac{-1}{(x - x_i)^2} + \lim_{x_{n+1} \to x} \frac{f^{n+2}(\eta))}{(n+1)!} ,$$

y como f^{n+2} es función continua, existe un número $\theta \in (a, b)$ tal que

$$\lim_{x_{n+1} \to x} \frac{f^{n+2}(\eta))}{(n+1)!} = \frac{f^{n+2}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Así pues,

$$E'(x) = \left[\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right]' = \frac{f^{n+2}(\theta)}{(n+1)!} W_n(x) +$$

$$+ W'_n(x) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Si se desea el valor de la derivada en un nodo x_i, entonces se considera

$$f'(x_i) = P'_n(x_i) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot W'_n(x_i) .$$

Depende de la forma con la cual se exprese el polinomio interpolador la obtención de una fórmula u otra, de diferenciación numérica.

Ejemplo 1

De una función f se sabe que es derivable y que f(-1) = 7, f(0) = 3, f(1) = 1, f(2) = 5. Para determinar el valor de la derivada de la función en el punto x = 0´5 se procede de la siguiente forma:

Se construye la tabla en diferencias progresivas

$x_0 = -1$	7			
		-4		
$x_1 = 0$	3		2	
		-2		4
$x_2 = 1$	1		6	
		4		
$x_3 = 2$	5			

y se determina el polinomio interpolador correspondiente,

$$P_3(x) = 7 - 4(x+1) + \frac{2}{2!}(x+1)x + \frac{4}{3!}(x+1)x(x-1) =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{11}{3}x + 3.$$

Se considera $f'(\frac{1}{2}) \cong P'_3(\frac{1}{2}) = \frac{-13}{6}$.

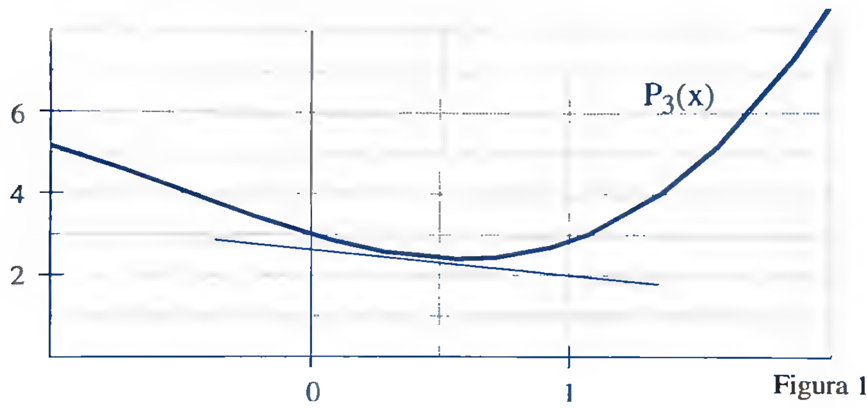


Figura 1

14-1.2 Derivación mediante fórmulas simbólicas

Sea f una función cuya serie de Taylor en x_0 converge en todo **R**. Se considera el cambio $u = \frac{x - x_0}{h}$. Si x recorre el conjunto de nodos equidistantes una distancia h, entonces u recorre valores enteros.

Al denominar $y_u = f(x_0 + uh) = f(x)$, entonces

$$y_u = f(x_0) + f'(x_0)\,uh + \frac{f''(x_0)}{2!}u^2h^2 + \ldots$$

Se valora $y_u - y_{-1} = f'(x_0)\,(u+1)\,h + \frac{f''(x_0)}{2!}(u^2 - 1)\,h^2 + \ldots$,

y se despeja $f'(x_0)$, $f'(x_0) = \frac{y_u - y_{-1}}{h\,(u+1)} - \frac{f''(x_0)}{2!}(u-1)\,h - \ldots$

Si se toma $f'(x_0) \cong \frac{y_u - y_{-1}}{h\,(u+1)}$, entonces el error que se comete es proporcional al valor , h, de la distancia entre nodos.

En el caso particular de u = 1 se tiene $f'(x_0) \cong \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$

y el error que se comete es proporcional a h . Así pues,

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h}$$

y conviene tomar nodos muy próximos.

Al considerar la aplicación derivada D en un punto x, se puede escribir simbólicamente el desarrollo en serie de la aplicación e^{hD}

$$f(x+h) = I[f(x)] + hD[f(x)] + \frac{h^2}{2!}D^2[f(x)] + ... = e^{hD}[f(x)] ,$$

así pues,

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = (e^{hD} - I)[f(x)] ,$$

es decir,

$$\Delta = e^{hD} - I \quad \text{y por tanto,} \quad e^{hD} = I + \Delta ,$$

al operar simbólicamente:

$$hD = Ln(I + \Delta) ,$$

$$D = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + ...\right] .$$

Para utilizar una aplicación "aproximadora" de la aplicación derivada, basta truncar la serie de operadores, por ejemplo:

$$D \approx \frac{1}{h}\Delta ,$$

cometiéndose un error proporcional a h. Al reiterar la actuación del operador se tiene

$$\Delta^2 = h^2D^2 + h^3D^3 + ... \quad \text{y} \quad D^2 = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 - \Delta^3 - \frac{11}{12}\Delta^4 + ...\right],$$

$$\Delta^3 = h^3D^3 + \frac{3}{2}h^4D^4 + ... \quad \text{y} \quad D^3 = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + ...\right],$$

etc.

Sección

14-2 Integración numérica

Calcular la integral entre a y b de una función continua f definida en el intervalo [a,b]

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

puede presentar serias dificultades, bien por no saber determinar una función primitiva o bien por ser muy compleja la evaluación de una función primitiva conocida. Cabe la posibilidad de considerar particiones del intervalo [a,b] con n+1 elementos, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ y calcular

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\,(t_{i+1} - t_i)\ .$$

Este método no es recomendable en la mayoría de los casos debido a la lentitud de la convergencia.

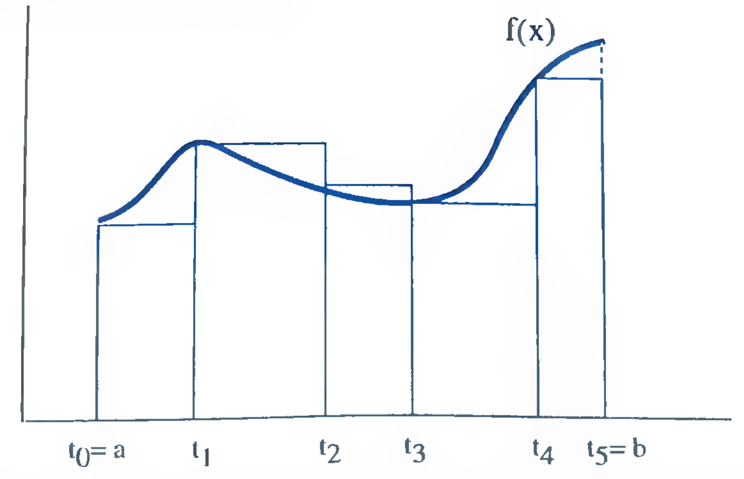


Figura 2

Se puede considerar la aplicación I de las funciones continuas a **R** definida de la forma

$$f \to If = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Si If no resulta fácil de calcular conviene determinar un valor aproximado, para ello, si se tiene un polinomio aproximador de la función f, P_n, entonces se toma IP_n como valor aproximado de If.

Si bien la diferenciación numérica mediante polinomios interpoladores de la función puede presentar serios problemas, en la integración numérica es muy útil considerar polinomios aproximadores de la función f obtenidos mediante interpolación.

Al considerar n+1 nodos distintos $x_0,\dots,x_n$ y el polinomio interpolador de la función f relativo a los nodos anteriores, P_n, para cualquier $x\in[a,b]$

$$f(x) - P_n(x) = E(x),$$

donde E(x) representa el error que se comete al considerar $P_n(x)$ como valor aproximado de f(x).

Si $f\in C^{n+1}([a,b])$, entonces para $x\in(a,b)$ existe un $\xi_x\in(a,b)$ tal que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) + \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\ .$$

Así pues, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx + \int_a^b\left(\frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right)dx,$

luego, $\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_n(x)\,dx$.

Al considerar n+1 nodos equidistantes $x_0,\dots,x_n$ y la forma de Newton-Gregory del polinomio interpolador se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b\left(f(x_0) + \Delta f(x_0)\frac{x-x_0}{h} + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}\,\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)}{h^n}\right)dx$$

A las fórmulas de integración numérica se las denomina **fórmulas de cuadratura numérica.** Cualquier fórmula de estas depende de:

(a) Los nodos elegidos y la distancia entre nodos consecutivos.

(b) El grado del polinomio interpolador.

(c) El intervalo [a,b].

Las fórmulas de cuadratura numérica que se desarrollan en este apartado son de las denominadas cerradas, las cuales cumplen la condición que el intervalo [a,b] está contenido en el intervalo $[x_0, x_n]$.

14-2.1 Fórmula del Trapecio

Para determinar

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se consideran n+1 nodos equidistantes tales que $a = x_0, \ldots, x_n = b$, y se considera la descomposición

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx\,.$$

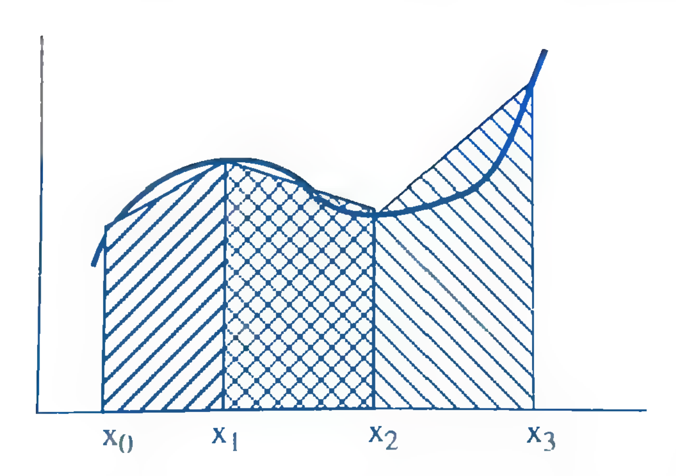


Figura 3

Para calcular los sumandos anteriores se considera el *polinomio interpolador de primer grado* relativo a cada par de nodos x_i y x_{i+1}.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x_0) + \Delta f(x_0)\frac{x - x_0}{h}\right) dx =$$

$$= h\int_0^1 (f(x_0) + \Delta f(x_0)\,s)\,ds = h\left[f(x_0)\,s + \Delta f(x_0)\frac{s^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= h\left[f(x_0) + \Delta f(x_0)\frac{1}{2}\right] = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))\,,$$

dado que se realizó el cambio $s = \dfrac{x - x_0}{h}$, y se integró. Así pues,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) =$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$

14-2.2 Fórmulas de Simpson

Para determinar

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se consideran 2n +1 nodos equidistantes $a = x_0, \ldots, x_{2n} = b$ y se considera la descomposición

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx.$$

Para calcular los distintos sumandos se considera *el polinomio interpolador de segundo grado* relativo a los nodos $x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}$ con $i = 0, 1, 2\ldots$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \left(f(x_0) + \Delta f(x_0)\frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}\frac{x - x_0}{h}\frac{x - x_1}{h}\right)dx$$

$$= h\int_0^2 \left(f(x_0) + \Delta f(x_0)\,s + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}s(s-1)\right)ds =$$

$$= h\left[f(x_0)\,s + \Delta f(x_0)\frac{s^2}{2} + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right)\right]\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right),$$

dado que se realizó el cambio $s = \dfrac{x - x_0}{h}$, y se integró. Así pues,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{2i-1}) + 2f(x_{2i}) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right).$$

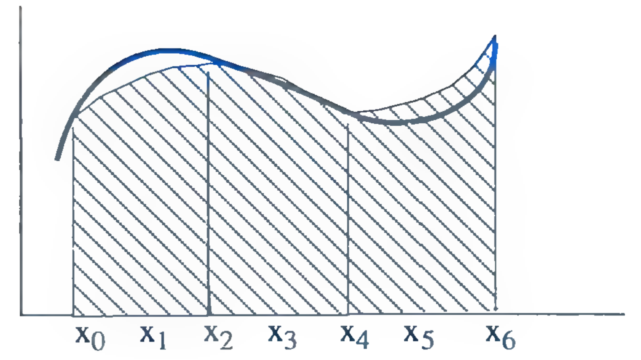


Figura 4

14-2.3 Fórmulas de Newton-Cotes

Si el polinomio interpolador que se utiliza es de grado tres o cuatro se obtienen las fórmulas:

- Si se consideran 3n+1 nodos equidistantes tal que $x_0 = a$ y $x_{3n} = b$.

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right).$$

- Si se consideran 4n+1 nodos equidistantes tal que $x_0 = a$ y $x_{4n} = b$.

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_4} P_4(x)\,dx =$$

$$= \frac{2h}{25}\left(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right).$$

Ejemplo 2

Para calcular $\int_0^1 \cos x^3 dx$ utilizamos:

- El método de los trapecios para 21 puntos nodales, n = 20:

$$\int_0^1 \cos x^3 dx = \frac{1}{40}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + f(x_{20})\right) \cong 0.931178622 .$$

- El método de Simpson para 21 puntos nodales, n = 10:

$$\int_0^1 \cos x^3 dx = \frac{1}{60}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + \ldots + f(x_{20})\right) \cong 0.931704017 .$$

En general el método de Simpson comporta una mejor aproximación.

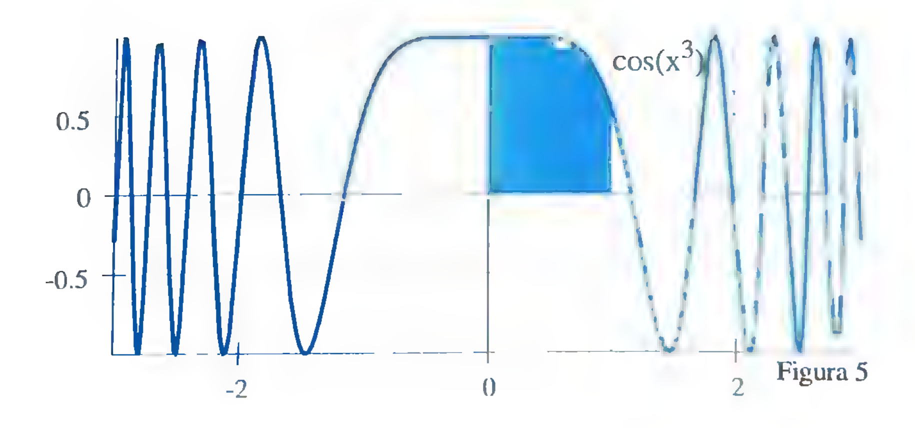


Figura 5

Problemas Propuestos

1) Conocida de una función f la tabla de valores:
f(-0´3) = 1´6081, f(-0´2) = 1´4016, f(-0´1) = 1´2001, f(0) = 1, f(0´1) = 0´8001, f(0´2) = 0´6016 y f(0´3) = 0´4081.
Determinar un valor aproximado de f´(0´1) y estudiar el error cometido.

2) Determinar un valor mínimo de la función f(x) conocida la tabla f(0´60) = 0´6221; f(0´65) = 0´6155; f(0´70) = 0´6138 y f(0´75) = 0´6170.

(La función desconocida es $f(x) = e^x - 2x$).

3) Calcular $\int_1^2 x \mathrm{Ln} x\, dx$ mediante el cálculo de una función primitiva y por el método de los trapecios. Comparar los dos resultados.

4) Determinar un valor aproximado de las integrales:

a) $\int_{-2}^{4} e^{x^2} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\ x^2 dx$.

5) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ mediante el cálculo de una función primitiva, y con los métodos numéricos del trapecio y de Simpson.

6) Calcular $\int_0^1 f(x) \mathrm{Ln} x\, dx$ si la función f es conocida únicamente en los puntos $f(0) = 1, f(\frac{1}{3}) = 2, f(\frac{2}{3}) = 4$ y $f(1) = 8$.

7) Estimar el error de truncamiento de la fórmula del trapecio.

8) Estimar el error de truncamiento de la fórmula de Simpson.

Indice

BIBLIOGRAFIA

APARICIO DEL PRADO, C., PAYA, R.: *Análisis Matemático I,* Universidad de Granada , 1985.

APOSTOL, T. M.: *Análisis Matemático,* Reverté. 1960.

APOSTOL, T. M.: *Calculus..* Reverté, 1967.

AYRES, F., MENDELSON, E.: *Calculo diferencial e Integral.* McGraw-Hill Schaum Series, 1969.

BALLVE,M. y otros: *Problemas de Análisis Matemático.* Sanz y Torres, 1993. (Problemas resueltos del presente libro).

BARBOLLA, R., GARCIA MARRERO, M. y otros. : *Introducción al Análisis Real..* A.C., 1975.

BARTLE, R. G., SHERBERT, D. T.: *Introducción al Análisis Matemático de una variable* . Linusa, 1984.

BERMAN, C. N.: *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Mir, 1977.

CARNAHAN, B., LUTHER, H. A.: *Cálculo Numérico.* Rueda, 1979.

COHEN, A. M.: *Análisis Numérico.* Reverté, 1977.

DELGADO, M. y otros.: *Matemáticas.* McGraw-Hill Schaum Series, 1990

DEMIDOVICH, B.: *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Paraninfo, 1976.

FERNANDEZ NOVOA, J. : *Análisis Matemático I* . U.N.E.D., 1980.

FERNANDEZ VIÑA, J. A.: *Lecciones de Análisis Matemático.* Tecnos,1976.

FLORY,G.:*Ejercicios de Topología y de Análisis.* Reverté, 1981.

GASCA,M.:*Calculo Numérico I y II.* U.N.E.D., 1976.

HOFFMAN, L.D.: *Cálculo Aplicado.* McGraw-Hill, 1983.

LANG, S.: *Cálculo I* . Fondo Interactivo Iberoamericano,1973.

LANG, S.: *Cálculo II* . .Fondo Interactivo Iberoamericano,1973.

LINES, E.: *Principios de Análisis Matemático.* Reverté, 1983.

POLYA, G., SZEGO, G.: *Problems and Theorems in Analysis.* (volúmenes I y II). Springer-Verlag, 1977.

RUDIN, W.: *Principios del Análisis Matemático.* McGraw-Hill, 1980.

SPIVAK, M. : *Calculus* (volúmenes I y II). Reverté, 1970.



> rightsum(funcion(x), x=0..1,partes);
rightbox(funcion(x), x=0.001..1,partes);
ISBN 84-88667-24-8
9 788488 667243
ISBN: 84-88667-24-8